



Metodeudvikling inden for dynamisk efficiensmåling

Estimering af og statistiske test for variabelspecifikke ændringer af estimeret best practice

Asmild, Mette

Publication date:
2017

Document version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Asmild, M., (2017). *Metodeudvikling inden for dynamisk efficiensmåling: Estimering af og statistiske test for variabelspecifikke ændringer af estimeret best practice*, 54 s., IFRO Dokumentation Nr. 2017/7

IFRO Dokumentation



Metodeudvikling inden for dynamisk efficiensmåling

Estimering af og statistiske test for
variabelspecifikke ændringer af
estimeret best practice

Mette Asmild

IFRO Dokumentation 2017 / 7

Metodeudvikling inden for dynamisk efficiensmåling. Estimering af og statistiske test for variabelspecifikke ændringer af estimeret best practice

Forfatter: Mette Asmild

Denne dokumentation er udarbejdet i forbindelse med metodeudvikling i henhold til aftale mellem Institut for Fødevarer- og Ressourceøkonomi og Miljø- og Fødevarerministeriet om forskningsbaseret myndighedsberedskab.

Udgivet september 2017

Se øvrige udgivelser i serien IFRO Dokumentation her:

http://www.ifro.ku.dk/publikationer/ifro_serier/dokumentation/

Se øvrige myndighedsaftalte udredninger på www.ifro.ku.dk/publikationer/ifro_serier/udredninger/

Institut for Fødevarer- og Ressourceøkonomi (IFRO)

Københavns Universitet

Rolighedsvej 25

1958 Frederiksberg

www.ifro.ku.dk

Metodeudvikling inden for dynamisk efficiensmåling

Estimering af og statistiske test for variabelspecifikke ændringer af estimeret best practice

1. Introduktion

I konkurrencebarometeranalysen udført af IFRO i 2015 (Asmild et al, 2015) anvendtes Data Envelopment Analysis (DEA) metoden til at give relative efficiensscorer for landbrugsbedrifterne i de forskellige lande ift. den estimerede rand for best practice i deres egne lande. Disse scorer blev fortolket som udtryk for driftslederegenskaber (managerial efficiency), dvs. hvor gode bedrifterne var til at udnytte produktionsmulighederne i det pågældende land. Desuden blev der beregnet scorer for forskellene mellem de estimerede rande for best practice i de forskellige lande (global frontier difference/program efficiency), som blev fortolket som forskelle i produktionsmuligheder eller rammevilkår landene imellem. Analyserne blev udført for hvert af årene 2004-2012.

Som uddybning af ovenstående analyser er det relevant at kigge nærmere på, hvordan den estimerede best practice udvikler sig over tid. Eksisterende metoder kan kun give enten overordnede mål for forskellen mellem to rande eller også udtrykke en enkelt observations vurderede forskel mellem de to rande. Af særlig relevans for analyserne af forskelle i landbrugets konkurrencevæne mellem de europæiske lande er metoder, der kan 1) give estimerer for bevægelserne af randene over tid, hvor det især er interessant at kunne vurdere, om randene bevæger sig lige meget i forskellige dimensioner¹ og 2) teste om der er statistisk signifikante bevægelser af randene over tid og/eller statistisk signifikante forskelle på bevægelserne i forskellige dimensioner.

For hver observation defineres mål for forskellen mellem randene for to forskellige år i hver af de dimensioner, der indgår i analysen. Dette giver en flerdimensional vektor med dimensionsspecifikke randforskelle. Kombineres vektorerne for alle observationerne, fås en flerdimensional fordeling for de dimensionsspecifikke randforskelle. Ved at estimere relevante parametre i denne ukendte fordeling vil dimensionerne kunne sammenlignes, således at man med en rimelig statistisk sikkerhed ville kunne afgøre om forbedringer i produktionsmuligheder i højere grad er sket på én produktionsfaktor end på den anden. Men for formelt at kunne teste, om der er signifikante forskelle på ændringerne i de forskellige dimensioner, kræver det undersøgelser af disse ukendte flerdimensionale statistiske fordelinger og derefter valg af passende statistiske tests, der kan bruges til at undersøge forskelle i lokationer (typisk middelværdierne) i disse fordelinger. Udviklingen af sådanne mål og tilhørende tests gør det muligt at fastslå med statistisk sikkerhed, om der er sket signifikante ændringer i produktionsmulighederne over tid, samt om der er sket større ændringer over tid på nogle produktionsfaktorer end på andre.

2. Metode

2.1. Beregning af dimensionsspecifikke frontier shifts

Betrakt et sæt af sammenlignelige observationer (f.eks. bedrifter af en bestemt type) observeret i T tidsperioder ($t = 1, \dots, T$). Antallet af observationer i en given tidsperiode er N^t , og n^t indikerer en given observation i tidsperiode t ($n^t = 1, \dots, N^t$). Alle observationerne bruger I forskellige inputs $x_i^{n^t}$ ($i = 1, \dots, I$) til

¹ Her tænkes på, om forbedringer i produktionsmulighederne over tid overvejende sker i en produktionsfaktor (f.eks. arbejdskraft) i forhold til en anden produktionsfaktor (f.eks. kapital)

at producere J forskellige outputs y_j^n ($j = 1, \dots, J$). Det antages, at der produceres under konstant skalaafkast, som oftest er det mest relevante for analyser af f.eks. konkurrenceevne, da alle observationer dermed bliver sammenlignet med de observationer, der udover at være efficiente, også opererer på den optimale skala, og man dermed ikke i efficiensanalysen tilgiver (ignorerer) den inefficiens, der stammer fra, at observationer opererer på en størrelse, der er enten over eller under den optimale.

For at analysere bevægelsen af randen mellem tidsperiode t' og tidsperiode t'' findes først de variabelspecifikke efficiensscorer i hver (her) outputdimension i forhold til observationernes egen rand (randen for den tidsperiode som observationen tilhører). Disse beregnes for observation O i en periode t' , $(x^{0t'}, y^{0t'}) \in \mathcal{R}^I \times \mathcal{R}^J$, ved for hver af de J outputs ($j = 1, \dots, J$) en ad gangen at løse det følgende lineære programmerings (LP) problem:

$$\begin{aligned}
 e^*(t')_j^{0t'} &= 1/\max_{\lambda, d_j} \varphi \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{n=1}^{N^{t'}} \lambda^n x_i^{n^{t'}} &\leq x_i^{0t'} \quad i = 1, \dots, I \\
 \sum_{n=1}^{N^{t'}} \lambda^n y_j^{n^{t'}} &\geq \varphi y_j^{0t'} \\
 \sum_{n=1}^{N^{t'}} \lambda^n y_{-j}^{n^{t'}} &\geq y_{-j}^{0t'} \\
 \lambda^n &\geq 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

hvor notationen $(-j)$ indikerer alle de andre output dimensioner på nær output j . Efficiensscoren $e^*(t')_j^{0t'} \in [0; 1]$ indikerer, hvor stor en andel af den efficiente outputmængde der produceres, således at en score på f.eks. 0,8 indikerer, at observationen kun producerer 80% af den mængde af det pågældende output, som den burde kunne producere, og dermed som den skal producere for at blive efficient.

Derefter defineres den såkaldte biennale (toårige) rand, som er den rand, der udspænder (indhyller) alle observationerne fra de to tidsperioder t' og t'' (se Pastor, Asmild og Lovell, 2011). Hver observations relative afstand til den biennale rand måles her separat i hver outputdimension. Dette er en anden fremgangsmåde end i de tidligere analyser af forskelle mellem rande i den akademiske litteratur, som generelt giver et samlet overordnet mål for forskellene mellem randen og ikke dimensionsspecifikke mål.² Dette giver de variabelspecifikke biennale efficiensscorer, som for observation O i en periode t' , $(x^{0t'}, y^{0t'}) \in \mathcal{R}^I \times \mathcal{R}^J$ beregnes ved for hver af de J outputs ($j = 1, \dots, J$) en ad gangen at løse det følgende (LP) problem:

$$\begin{aligned}
 e^*(t' \cup t'')_j^{0t'} &= 1/\max_{\lambda, d_j} \varphi \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{n=1}^{(N^{t'}+N^{t''})} \lambda^n x_i^{n^{t' \cup t''}} &\leq x_i^{0t'} \quad i = 1, \dots, I \\
 \sum_{n=1}^{(N^{t'}+N^{t''})} \lambda^n y_j^{n^{t' \cup t''}} &\geq \varphi y_j^{0t'} \\
 \sum_{n=1}^{(N^{t'}+N^{t''})} \lambda^n y_{-j}^{n^{t' \cup t''}} &\geq y_{-j}^{0t'} \\
 \lambda^n &\geq 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

hvor notationen $(-j)$ igen indikerer alle de andre output dimensioner på nær output j , og $t' \cup t''$ indikerer fællesmængden mellem t' og t'' , dvs. mængden af observationer der tilhører enten tidsperiode t' eller tidsperiode t'' .

² En enkelt undtagelse kan findes i Asmild, Balenzentis og Hougaard (2016), der ved at kombinere såkaldt MEA med et Malmquist index indirekte får variabelspecifikke komponenter af Malmquist indexet.

Det skal her bemærkes, at brugen af den biennale rand sikrer, at de variabelspecifikke efficiensscorer målt i forhold til en anden rand end den, der alene er udspændt af observationer fra samme tidsperiode, er veldefinerede. Dette er ikke tilfældet, hvis vi f.eks. forsøger at måle variabelspecifikke efficiensscorer for en observation fra t' , men målt i forhold til randen for t'' , hvilket bl.a. er et problem ved fremgangsmåden i Asmild, Balezentis og Haugaard (2016).

Dernæst beregnes variabelspecifikke såkaldte best practice gaps (BPG) for hver observation, som er forholdet mellem observationens relative afstand i en given dimension til randen, den biennale rand og randen for observationens egen tidsperiode (t'), dvs. forholdet mellem den variabelspecifikke biennale efficiensscore og den variabelspecifikke efficiensscore. Størrelsen af dette mål indikerer, hvor meget den biennale rand er bedre end t' -randen i den pågældende dimension, og har BPG-målet sin størst mulige værdi på 1, betyder det, at der er sammenfald mellem t' -randen og den biennale rand.

Formelt beregnes BPG-målet for $(x^{0t'}, y^{0t'}) \in \mathcal{R}^I \times \mathcal{R}^J$ for hver output dimension ($j = 1, \dots, J$) som:

$$\text{BPG}(t' \cup t'')_j^{0t'} = \frac{e^*(t' \cup t'')_j^{0t'}}{e^*(t')_j^{0t'}} \quad (3)$$

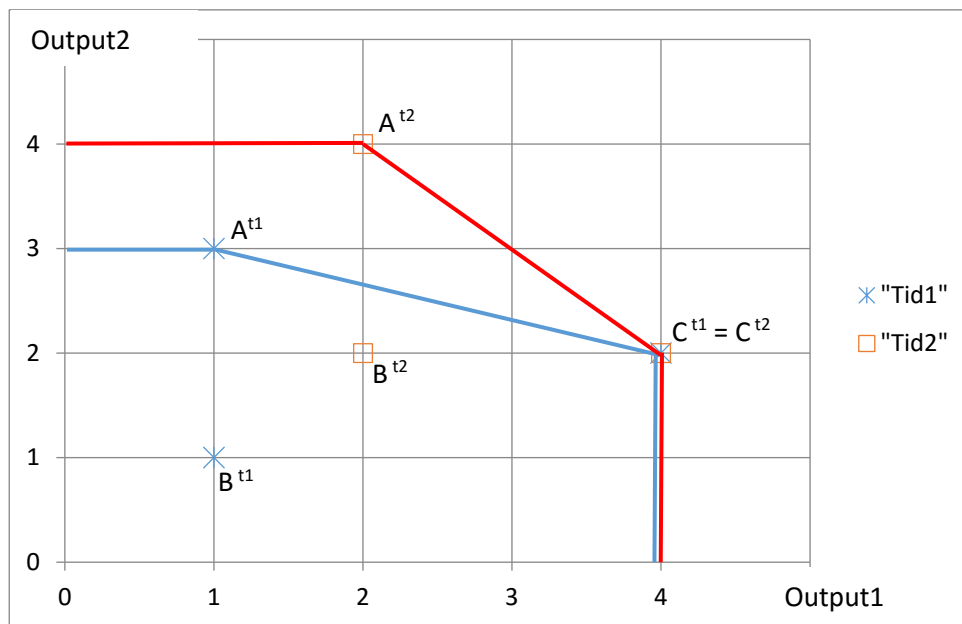
Og endelig beregnes forskellen mellem t' -randen og t'' -randen i en given dimension j , dvs. det dimensionsspecifikke såkaldte frontier shift, for observation 0, der i periode t' er givet ved $(x^{0t'}, y^{0t'})$ og i periode t'' er givet ved $(x^{0t''}, y^{0t''})$, som:

$$\text{FS}(t', t'')_j^0 = \frac{\text{BPG}(t' \cup t'')_j^{0t''}}{\text{BPG}(t' \cup t'')_j^{0t'}} \quad (4)$$

Illustrationer i 2 dimensioner (2 outputs med samme input), 3 observationer (A, B og C) og 2 tidsperioder (tid1 og tid2)

Eksempel 1:

I det første eksempel er der generelt produktivhedsforbedring fra tid1 til tid2 (observationerne A og B forbedrer sig i begge dimensioner, og observation C forbliver uændret), hvilket medfører, at den biennale rand er lig med tid2-randen i dette tilfælde.



Figur 1: Illustration (2 outputs, samme input) af eksempel 1 hvor der er generel produktivhedsforbedring

Først beregnes de variabelspecifikke efficiensscorer i hver outputdimension i forhold til observationernes egen rand ved brug af formel 1:

For tid1-observationerne ift. tid1-randen:

$$e^*(t^1)_1^{A^{t^1}} = 1$$

$$e^*(t^1)_1^{B^{t^1}} = 0,25$$

$$e^*(t^1)_1^{C^{t^1}} = 1$$

$$e^*(t^1)_2^{A^{t^1}} = 1$$

$$e^*(t^1)_2^{B^{t^1}} = 0,33$$

$$e^*(t^1)_2^{C^{t^1}} = 1$$

Og for tid2-observationerne ift. tid2-randen:

$$e^*(t^2)_1^{A^{t^2}} = 1$$

$$e^*(t^2)_1^{B^{t^2}} = 0,5$$

$$e^*(t^2)_1^{C^{t^2}} = 1$$

$$e^*(t^2)_2^{A^{t^2}} = 1$$

$$e^*(t^2)_2^{B^{t^2}} = 0,5$$

$$e^*(t^2)_2^{C^{t^2}} = 1$$

Så beregnes de variabelspecifikke efficiensscorer for både tid1- og tid2-observationerne ift. den biennale rand vha. formel 2:

$$e^*(t^1 \cup t^2)_1^{A^{t^1}} = 0,33$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_1^{B^{t^1}} = 0,25$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_1^{C^{t^1}} = 1$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_2^{A^{t^1}} = 0,75$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_2^{B^{t^1}} = 0,25$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_2^{C^{t^1}} = 1$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_1^{A^{t^2}} = 1$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_1^{B^{t^2}} = 0,5$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_1^{C^{t^2}} = 1$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_2^{A^{t^2}} = 1$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_2^{B^{t^2}} = 0,5$$

$$e^*(t^1 \cup t^2)_2^{C^{t^2}} = 1$$

Tabel 1: Efficienssscorerne i eksempel 1

	$e(t1)_1$	$e(t1)_2$	$e(t2)_1$	$e(t2)_2$	$e(t1 \cup t2)_1$	$e(t1 \cup t2)_2$
A^{t1}	1	1			0,33	0,75
B^{t1}	0,25	0,33			0,25	0,25
C^{t1}	1	1			1	1
A^{t2}			1	1	1	1
B^{t2}			0,5	0,5	0,5	0,5
C^{t2}			1	1	1	1

Dernæst beregnes BPG-målene vha. formel 3:

Tabel 2: BPG-målene i eksempel 1

	$BPG(t1 \cup t2)_1$	$BPG(t1 \cup t2)_2$
A^{t1}	$0,33/1=0,33$	$0,75/1=0,75$
B^{t1}	$0,25/0,25=1$	$0,25/0,33=0,75$
C^{t1}	$1/1=1$	$1/1=1$
A^{t2}	$1/1=1$	$1/1=1$
B^{t2}	$0,5/0,5=1$	$0,5/0,5=1$
C^{t2}	$1/1=1$	$1/1=1$

Og endelig beregnes frontier shifts vha. formel 4:

Tabel 3: Frontier shiftene i eksempel 1

	$FS(t1, t2)_1$	$FS(t1, t2)_2$
A	$1/0,33=3$	$1/0,75=1,33$
B	$1/1=1$	$1/0,75=1,33$
C	$1/1=1$	$1/1=1$

Så fra observation A's synspunkt har randen fra tid1 til tid2 forbedret sig med en faktor 3 i output1-retningen. Dette fremkommer ved, at observation A i t1 er efficient (på t1-randen) med en produktion af 1 enhed af det første output og 3 enheder af det andet output. Men for at være efficient ift. den biennale rand skal A^{t1} producere 3 enheder af det første output sammen med de 3 enheder af det andet output og dermed tredoble produktionen af det første output, hvilket reflekteres i, at $BPG(t1 \cup t2)_1^{A^{t1}} = 0,33$. Så t1-randen har kun en tredjedel af den produktion af output1, som den biennale rand har, ud fra A^{t1} 's placering, hvilket er det, BPG-målet indikerer. Laver man samme overvejelser for observation A i t2, fås $BPG(t1 \cup t2)_1^{A^{t2}} = 1$, hvilket viser at A^{t2} 's egen rand er sammenfaldende med den biennale rand. Da formålet er at sammenligne t1-randen med t2-randen snarere end de sammenligninger med den biennale rand, der er reflekteret i BPG-målene, "divideres den biennale rand ud" ved at for observation A at dividere BPG-målet for A^{t2} med BPG-målet for A^{t1} , hvilket giver frontier shift-målet, der udtrykker, hvor meget randen for t2 er bedre end randen for t1 fra observation A's synspunkt. Her er $FS(t1 \cup t2)_1^A = 3$, hvilket indikerer, at tid2-randen er "3 gange så god" som t1-randen i output1-retningen (dimensionen) fra observation A's synspunkt. Tilsvarende er

$FS(t1 \cup t2)_2^A = 1,33$, hvilket indikerer, at tid2-randen er "en tredjedel bedre" end t1-randen i output2-retningen (dimensionen) fra observation A's synspunkt.³

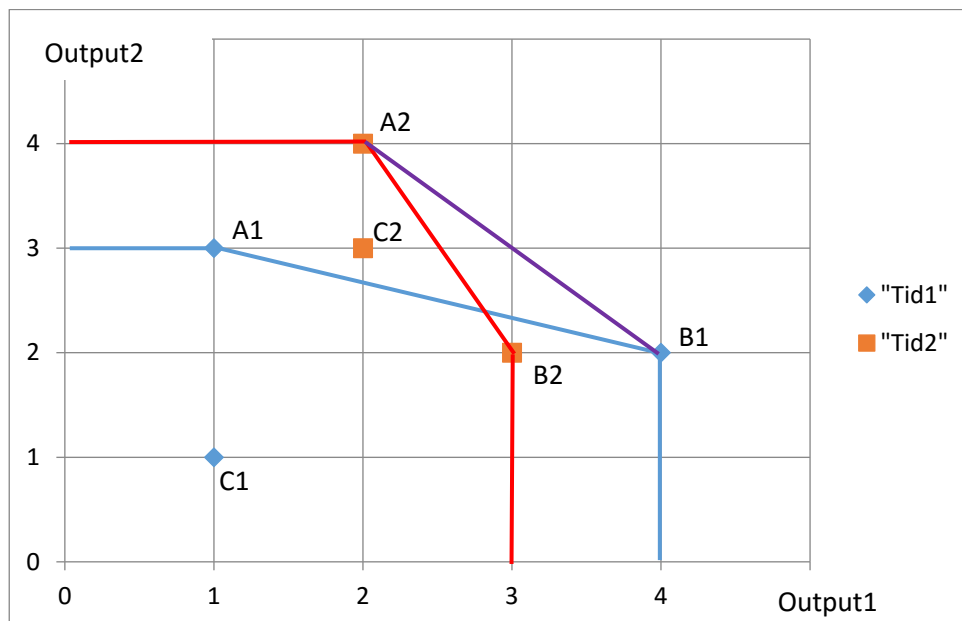
Observation B mener ikke, at randen har flyttet sig i output1-retningen, da $FS(t1 \cup t2)_1^B = 1$, hvilket Figur 1 også viser er korrekt for både B^{t1} og B^{t2} , da randen for t1 og randen for t2 er sammenfaldende "til højre" for både B^{t1} og B^{t2} . Til gengæld oplever observation B, at randen har forbedret sig med 33% i output2-retningen, da $FS(t1 \cup t2)_2^B = 1,33$.⁴

Observation C ligger både på egen rand og på den biennale rande i begge tidsperioder og har dermed ikke noget BPG i nogen af dimensionerne i nogen af tidsperioderne og dermed heller ikke noget frontier shift ($FS(t1 \cup t2)_1^C = FS(t1 \cup t2)_2^C = 1$).

Når randene er nestede (den ene fuldstændigt indeholdt i den anden) som i dette eksempel, bliver det i praksis kun den tidsperiode, der har BPG-mål, som er forskellige fra 1, der kommer til at bestemme de samlede størrelser af frontier shiftene. I det næste eksempel betragtes derfor et tilfælde, hvor randene for t1 og t2 krydser hinanden.

Eksempel 2:

I dette tilfælde er der produktivitetsforbedringer i output2-retningen (observation A og C øger produktionen af output2, og for observation B er produktionen af output2 uændret), hvorimod produktionen af output1 reduceres for observation B, hvilket medfører, at randene for tid1 og tid2 krydser hinanden. Dermed er den biennale rand i Figur 2 nedenfor udspændt af observationerne A2 og B1.



Figur 2: Illustration (2 outputs, samme input) af eksempel 1 hvor randene krydser hinanden

³ Bemærk, at (de dimensionsspecifikke) frontier shifts for observation A er en "fælles betragtning" for A^{t1} og A^{t2} . Men da A^{t2} i dette tilfælde ligger på den biennale rand, er det kun A^{t1} 's vurdering af randforskellen, der kommer til at tælle, da A^{t2} ikke kan se en forskel på egen rand og den biennale rand, der kan indgå i betragtningen.

⁴ Igen er det her kun B^{t1} , der kommer til at afgøre de samlede frontier shifts for observation B, da tid2-randen er den samme som den biennale rand (og dermed er der ikke noget BPG for B^{t2} (altså $BPG(t1 \cup t2)_1^{B^{t2}} = 1$)).

Tabel 4: Efficiensscorerne i eksempel 2

	$e(t1)_1$	$e(t1)_2$	$e(t2)_1$	$e(t2)_2$	$e(t1Ut2)_1$	$e(t1Ut2)_2$
A^{t1}	1	1			0,33	0,75
B^{t1}	1	1			1	1
C^{t1}	0,25	0,33			0,25	0,25
A^{t2}			1	1	1	1
B^{t2}			1	1	0,75	0,67
C^{t2}			0,8	0,75	0,67	0,75

Tabel 5: BPG-målene i eksempel 2

	$BPG(t1Ut2)_1$	$BPG(t1Ut2)_2$
A^{t1}	$0,33/1=0,33$	$0,75/1=0,75$
B^{t1}	$1/1=1$	$1/1=1$
C^{t1}	$0,25/0,25=1$	$0,25/0,33=0,75$
A^{t2}	$1/1=1$	$1/1=1$
B^{t2}	$0,75/1=0,75$	$0,67/1=0,67$
C^{t2}	$0,67/0,8=0,83$	$0,75/0,75=1$

Tabel 6: Frontier shiftene i eksempel 2

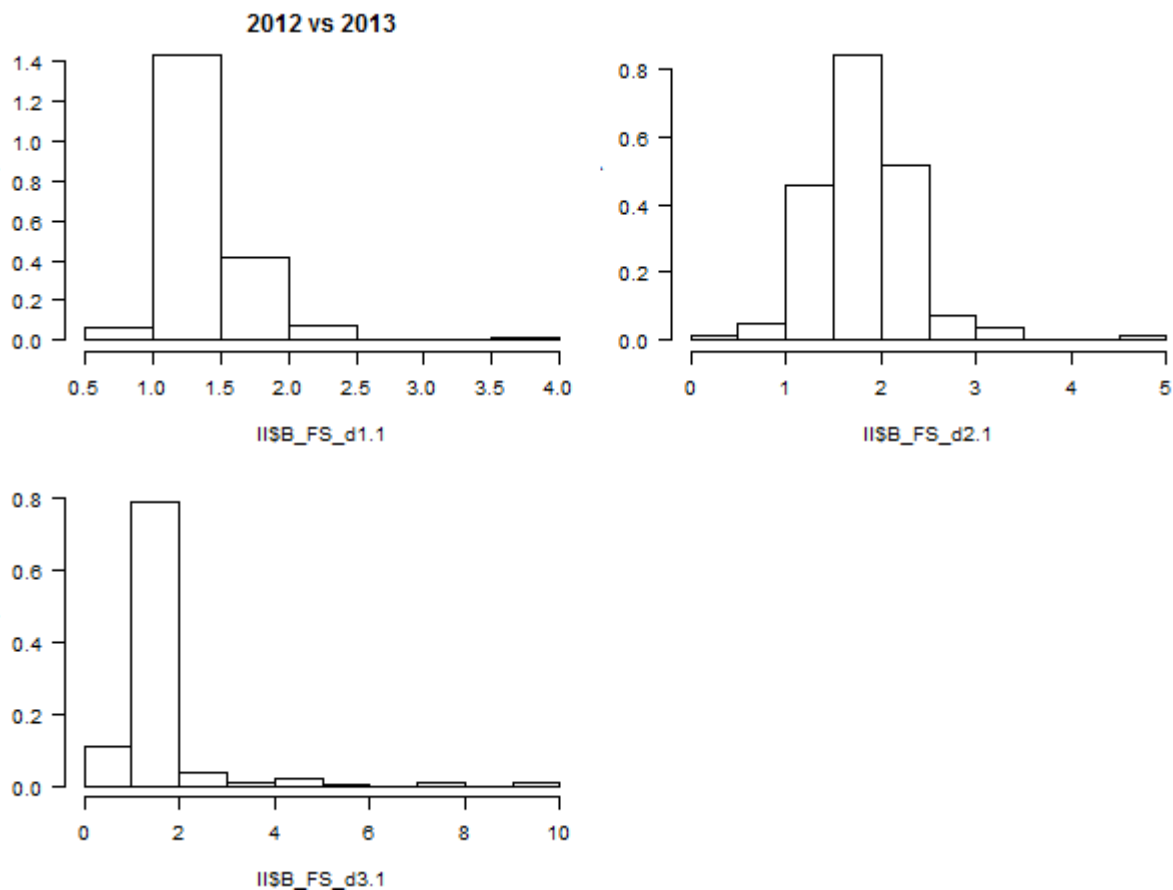
	$FS(t1,t2)_1$	$FS(t1,t2)_2$
A	$1/0,33=3$	$1/0,75=1,33$
B	$0,75/1=0,75$	$0,67/1=0,67$
C	$0,83/1=0,83$	$1/0,75=1,33$

Her vi kan se, at fra observation A's synspunkt er tid2-randen bedre end tid1-randen i begge dimensioner. Derimod er tid2-randen dårligere end tid1-randen i begge dimensioner fra observation B's synspunkt. Og endelig så gælder det fra observation C's synspunkt, at tid2-randen er bedre end tid1-randen i output2-dimensionen, men dårligere i output1-dimensionen.

2.2. Statistiske fordelinger af de dimensionsspecifikke frontier shifts

Beregningerne af de dimensionsspecifikke frontier shifts i foregående afsnit er specifikke for hver observation. Men for at kunne komme med overordnede konklusioner omkring de generelle frontier shifts, og hvorvidt disse er statistisk signifikante, skal vi kunne vurdere fordelingerne af frontier shiftene hen over alle observationerne. Da disse fordelinger ikke er kendte, estimeres de i et konkret eksempel, der udgøres af et stort datasæt for amerikanske banker observeret i hvert af 20 år fra 1994 til 2013. I dette datasæt beregnes de dimensionsspecifikke frontier shifts i hver af 3 outputdimensioner (i en outputorienteret efficiensanalyse der også har 3 inputdimensioner) for hver af 174-422 banker (som der er data for, og som opererer i hver af de to tidsperioder, der bliver analyseret) for hvert af de 19 årlige skift: 1994-1995, 1995-1996, ..., 2012-2013.

Først kan vi plote fordelingerne af hver af de dimensionsspecifikke frontier shifts, her for skiftet fra 2012 til 2013 (de tilsvarende histogrammer for 1994-1995, 1995-1996, ..., 2011-2012 kan ses i appendiks 1).



Figur 3: Histogrammer over fordelingerne af de tre dimensionsspecifikke frontier shift mellem 2012 og 2013 (se appendiks 1 for de øvrige år)

Bemærk, at observationer med et frontier shift > 10 er udeladt af plottene af hensyn til skaleringen (men inklusion af disse gør fordelingerne endnu mindre normalfordelte)

Det bemærkes ud fra histogrammerne, at frontier shiftene generelt ikke er normalfordelte. Dette kan også testes formelt ved hjælp af for eksempel den såkaldte Jarque-Bera test, der for ovenstående eksempel giver følgende resultat:

Jarque-Bera test for normality

```
data:  l1$B_FS_d1.1
JB = 1554.7, p-value < 2.2e-16
```

```
> j.b.norm.test(l1$B_FS_d2.1)
```

Jarque-Bera test for normality

```
data:  l1$B_FS_d2.1
JB = 57274, p-value < 2.2e-16
```

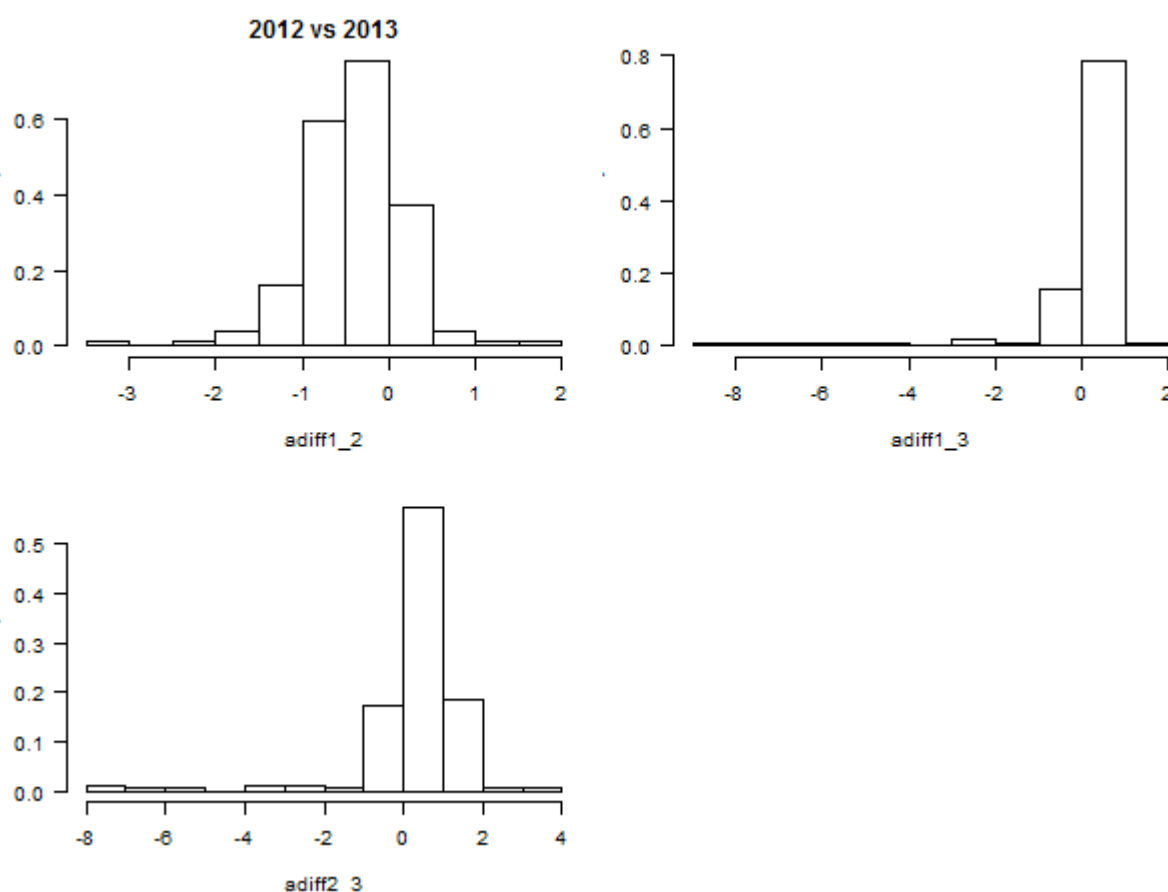
```
> j.b.norm.test(l1$B_FS_d3.1)
```

Jarque-Bera test for normality

```
data:  l1$B_FS_d3.1
JB = 2966.4, p-value < 2.2e-16
```

Vi ser for alle 3 dimensioner, at p-værdien er meget lille (og klart mindre end det typiske signifikansniveau på 5 %), hvilket betyder, at vi kan afvise, at FS-fordelingerne er normalfordelte. De tilsvarende tests for de andre tidsperioder kan også ses i appendiks 1. Dette betyder, at man i hvert fald ikke generelt kan antage, at frontier shifts er normalfordelte, omend de selvfølgelig godt kan være det i enkelte specielle tilfælde. Og som en konsekvens af den manglende normalfordeling kan de mest almindelige statistiske tests, som f.eks. t-tests, ikke uden videre bruges til at analysere, om der er signifikante frontier shift.

Det bør i forbindelse med ovenstående bemærkes, at frontier shiftene i de tre dimensioner ikke er uafhængige variable. Dette skyldes, at hver observation får en værdi for hver af de tre dimensionsspecifikke frontier shifts, og at der vil være en generel tendens til en positiv korrelation mellem frontier shiftene i de forskellige dimensioner, således at hvis f.eks. t2-randen er placeret langt bedre end t1-randen, så vil der generelt være store frontier shifts i alle tre dimensioner. Derfor kan man argumentere for, at frontier shiftene ikke er uafhængige variable, hvilket der skal tages højde for i statistiske tests, der sammenligner dimensionerne. Traditionelt vil man i sådanne tilfælde bruge såkaldte paired tests for at sammenligne variablene, for eksempel paired t-tests til at sammenligne variablene parvist. Men disse tests kræver, at forskellene mellem frontier shiftene i de to dimensioner, der sammenlignes, er normalfordelte. Derfor undersøges i det følgende, om dette kan antages at være tilfældet i det analyserede datasæt (ud fra argumentet om at hvis det ikke er tilfældet i det datasæt, kan det ikke antages at være generelt gyldigt).



Figur 4: Histogrammer over de parvise absolutte forskelle mellem frontier shiftene i de forskellige dimensioner for skiftet 2012-2013 (de andre år er vist i appendiks 2).

Bemærk, at observationer med et frontier shift > 10 er udeladt af plottene af hensyn til skaleringen (men inklusion af disse gør fordelingerne endnu mindre normalfordelte).

Igen ser vi ud fra histogrammerne, at de parvise forskelle mellem frontier shiftene i de forskellige dimensioner i dette tilfælde ikke følger en normalfordeling, hvilket bekræftes af f.eks. Jarque-Bera tests (for de andre år se appendiks 2):

```
> j b. norm. test(adi ff1_2)
```

```
Jarque-Bera test for normality
```

```
data:  adi ff1_2
```

```
JB = 43492, p-value < 2.2e-16
```

```
> j b. norm. test(adi ff1_3)
```

```
Jarque-Bera test for normality
```

```
data:  adi ff1_3
```

```
JB = 3718.5, p-value < 2.2e-16
```

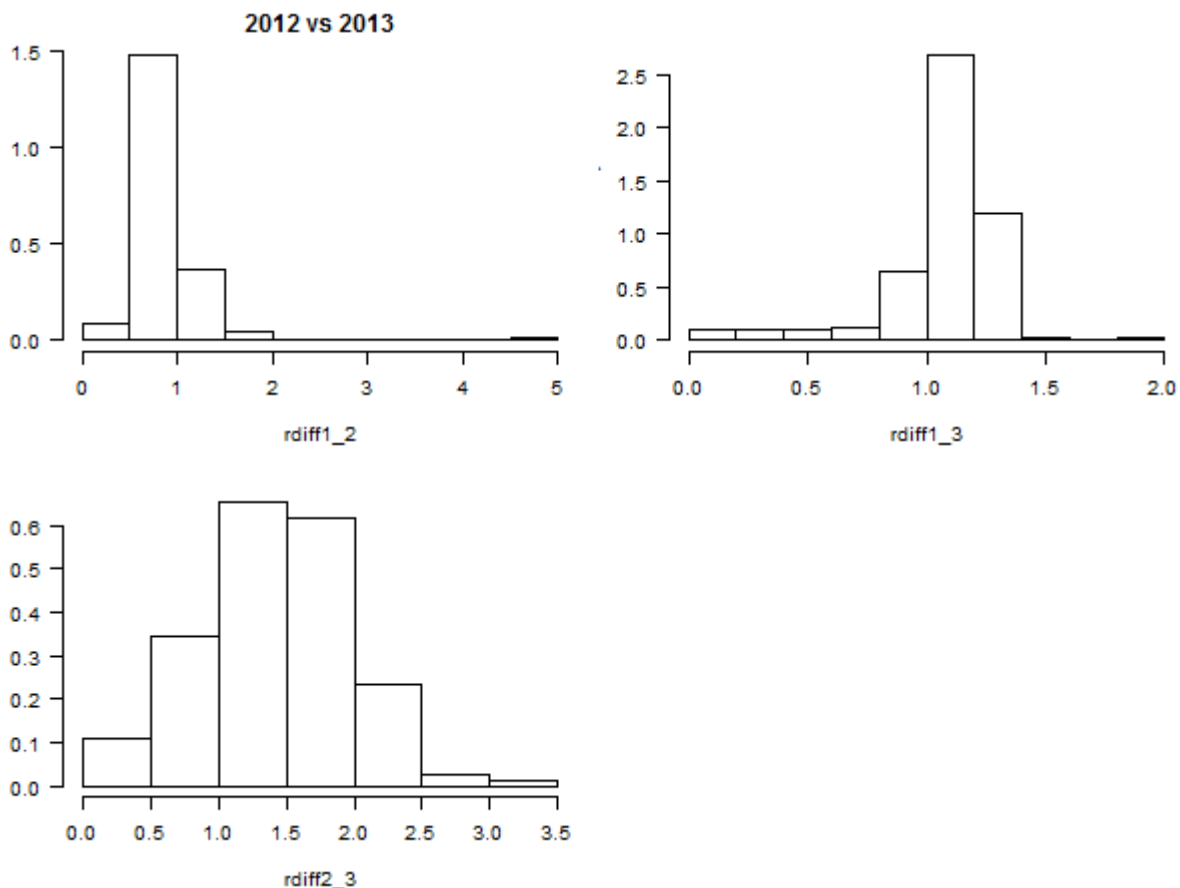
```
> j b. norm. test(adi ff2_3)
```

```
Jarque-Bera test for normality
```

```
data:  adi ff2_3
```

```
JB = 2153.2, p-value < 2.2e-16
```

Bemærk endelig, at det også vil være muligt at formulere modeller, der betragter de relative forskelle mellem frontier shiftene (i stedet for de absolutte forskelle ovenfor), men her ser vi også, at forskellene ikke generelt er normalfordelte (men kun i det specifikke tilfælde for de relative forskelle mellem skiftet i dimension 2 og skiftet i dimension 3) jf. eksempel for skiftet 2012-2013 illustreret nedenfor (med de andre år vist i appendiks 3):



Figur 5: Histogrammer over de parvise relative forskelle mellem frontier shiftene i de forskellige dimensioner for skiftet 2012-2013.

Bemærk, at observationer med et frontier shift > 10 er udeladt af plottene af hensyn til skaleringen (men inklusion af disse gør fordelingerne endnu mindre normalfordelte).

```
> j.b.norm.test(rdiff1_2)
```

Jarque-Bera test for normality

data: rdiff1_2

JB = 17192, p-value $< 2.2e-16$

```
> j.b.norm.test(rdiff1_3)
```

Jarque-Bera test for normality

data: rdiff1_3

JB = 258.7, p-value $< 2.2e-16$

```
> j.b.norm.test(rdiff2_3)
```

Jarque-Bera test for normality

data: rdiff2_3

JB = 4532.4, p-value $< 2.2e-16$

I stedet for at sammenligne frontier shiftene parvist ved at betragte forskellene mellem dem, men stadig tage højde for afhængigheden mellem skiftene i de forskellige dimensioner, kan anvendes den såkaldte Hotelling's T² test, som sammenligner en vektor af middelværdier fra en multi-dimensional (normal) fordeling med en vektor af postulerede værdier. Specifikt ville det her være relevant at teste, om middelværdierne er de samme i alle dimensionerne. Da denne test er baseret på standard middelværdier og kovariansmatricer vil det være meget følsomt over for såkaldte outliers og afvigelser fra normalfordelings-antagelsen. Da vi i det tidligere har set, at de individuelle frontier shifts i hver af dimensionerne ikke generelt er normalfordelte, ved vi allerede uden at foretage yderligere tests, at frontier shiftene samlet set heller ikke kan antages at følge en (her) tredimensional normalfordeling.

Da det nu er konkluderet, at frontier shiftene i de enkelte dimensioner ikke generelt er normalfordelte (og dermed følger de heller ikke samlet set en multi-dimensional (her tredimensional) normalfordeling), og desuden er hverken de absolutte eller relative parvise forskelle mellem shiftene i de forskellige dimensioner generelt normalfordelte, defineres i det følgende statistiske tests, der ikke er baseret på denne antagelse.

2.3. Robust Hotelling's T² test

Den robuste Hotelling's T² test anvender robuste estimater af lokation og spredning baseret på den såkaldte Minimum Covariance Determinant (MCD) (se Willems et al, 2002).

For formelt at definere testen betragt først de estimerede tredimensionale frontier shifts for observation n

($n = 1, \dots, N$) mellem to specifikke tidsperioder, $FS^n = \begin{pmatrix} FS_1^n \\ FS_2^n \\ FS_3^n \end{pmatrix}$ således, at $FS = (FS^1, \dots, FS^N)$ er den

tredimensionale fordeling af frontier shiftene, hvori vi i første omgang ønsker at teste, om middelværdierne er ens (svarende til et "parallelt" frontier shift hvor der er samme bevægelse af randen i hver (her output) dimension).

Anvendelsen af testen kræver jf. Willems et al (2002) følgende skridt, hvor p er antallet af dimensioner i de fordelinger, vi betragter, (så her $p=3$):

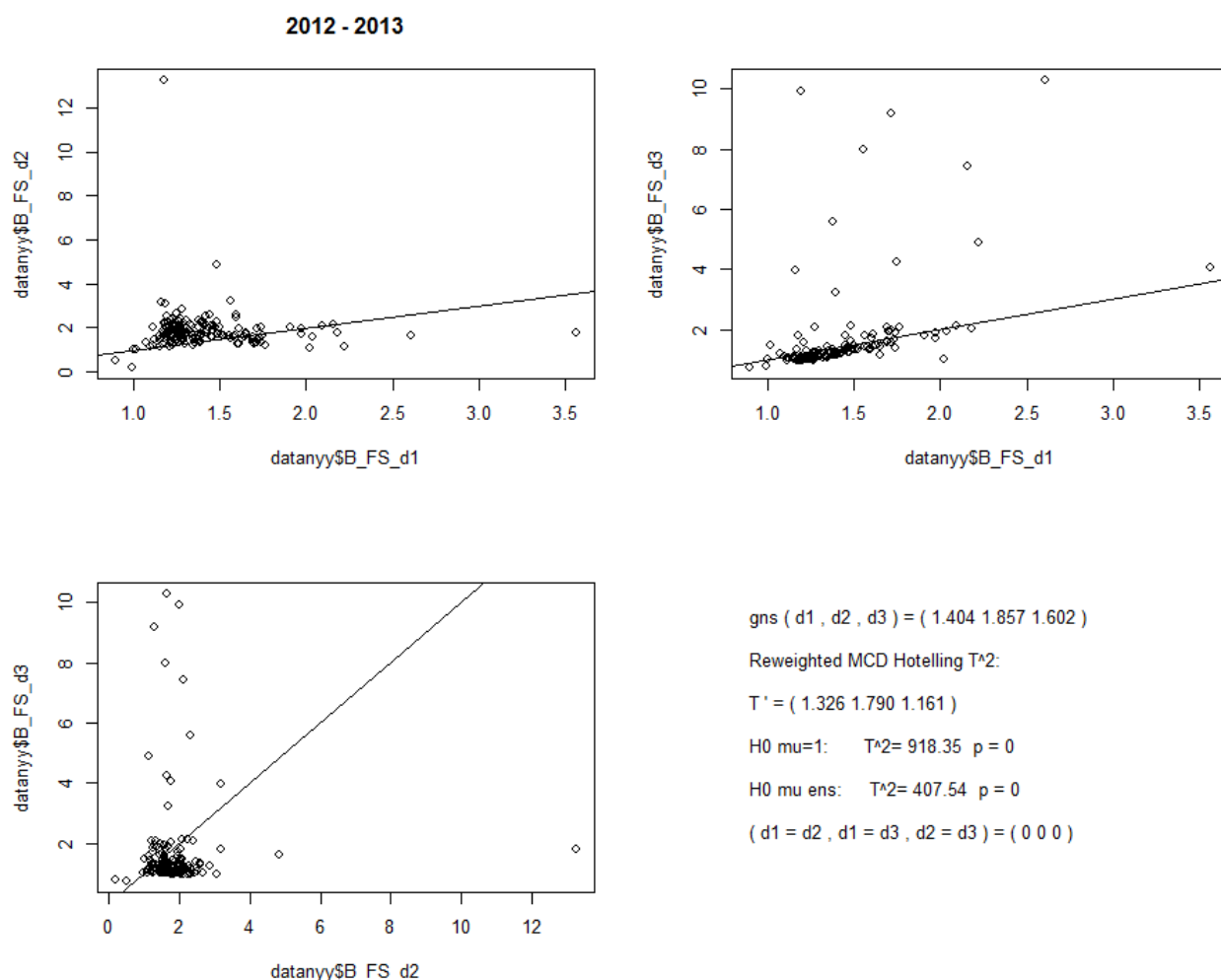
- 1) MCD findes ved at vælge den delmængde bestående af typisk 75% af de N observationer i FS , der har den mindste determinant i sin kovariansmatrix, dvs. de 75% af observationerne der har mindst spredning.
- 2) En vektor af middelværdier (T) og en kovariansmatrix (C) beregnes for disse 75% af observationerne.
- 3) Robuste afstandsmål for alle N observationer beregnes som $d^n = \sqrt{(FS^n - T)'C^{-1}(FS^n - T)}$
- 4) Vægte defineres for hver observation som $w^n = \begin{cases} 1, & \text{hvis } d^n < q \\ 0, & \text{hvis } d^n \geq q \end{cases}$, hvor q er en specificeret cut-off værdi.
- 5) ∂ bestemmes som den andel af de N observationer, der har en vægt $w^n = 0$ og robust afstand $d^n < 2q$.
- 6) En såkaldt konsistensfaktor c_∂ beregnes som $c_\partial = (1 - \partial)/F_{\chi^2_{p+2}}(q_\partial)$ hvor $q_\partial = \chi^2_{1-\delta}$ (og $F_{\chi^2_{p+2}}$ er den kumulative tæthed for χ^2 -fordelingen).
- 7) Beregn den vægtede middelværdi $T' = \frac{\sum_{n=1}^N w^n FS^n}{\sum_{n=1}^N w^n}$ som et robust estimat af lokationen af den tredimensionale fordeling (idet outliers får vægten 0).

- 8) Beregn den vægtede kovariansmatrix $C' = c_\delta d_{N,p} \frac{\sum_{n=1}^N w^n (FS^n - T')(FS^n - T')'}{\sum_{n=1}^N w^n}$
- 9) Beregn den robuste T^2 test størrelse, $T_R^2 = N(T' - \mu)'(C')^{-1}(T' - \mu)$, hvor μ er middelværdivektoren for alle N observationer.
- 10) Simulationsstudier har vist, at fordelingen af denne test-størrelse kan approksimeres med visse F-fordelinger.
- 11) For at teste om der er samme frontier shift i alle dimensioner, $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \dots$
- 12) Hvis vi ikke kan forkaste nulhypotesen i det foregående, kan det være interessant ydermere at teste, om der ikke er noget frontier shift i nogen af dimensionerne, dvs. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1 \dots$
- 13) Hvis nulhypotesen i (11) forkastes, kan man efterfølgende teste, om der er samme frontier shift i hvert par af dimensioner, her $H_{01}: \mu_1 = \mu_2$, $H_{02}: \mu_1 = \mu_3$ og $H_{03}: \mu_2 = \mu_3$

Empirisk illustration fortsat:

I dette afsnit illustreres anvendelsen af den robuste Hotelling T^2 test på det tidligere beskrevne datasæt for amerikanske banker. Analyserne for frontier shiftet mellem 2012 og 2013 er vist i teksten, men tilsvarende analyser er vist for alle skiftene 1994-1995, 1995-1996, ..., 2011-2012 (som kan ses i appendiks 4).

Beregningerne er foretaget i software programmet R ved anvendelse af pakken 'rrcov' og funktionen 'T2.test' med option 'method="MCD" '.



Figur 6: Scatterplots af de parvise sammenligninger af frontier shiftene i de forskellige dimensioner for skiftet 2012-2013.

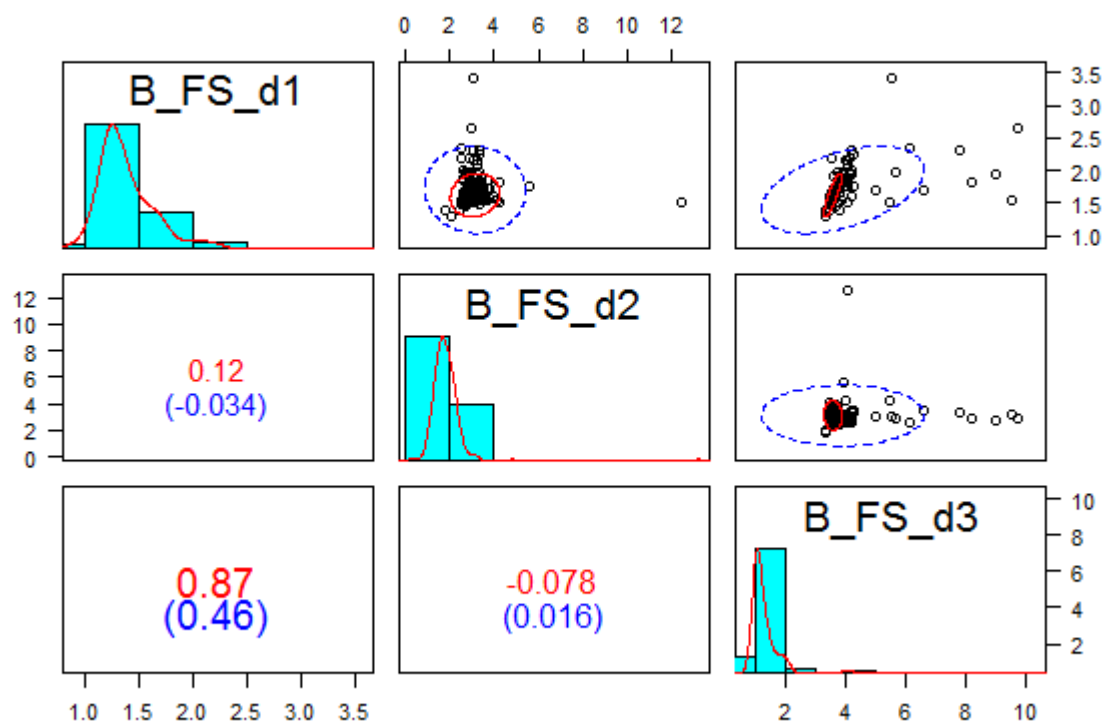
Bemærk, at observationer med et frontier shift > 10 er udeladt af plottene af hensyn til skaleringen.

I figur 6 ses først scatterplots af frontier shiftene plottet parvist mod hinanden. Jo mere ens frontier shiftene er i to af dimensionerne, jo tættere vil observationerne i det pågældende plot ligge på den indtegnede 45 graders linje. I plottene ses tydeligt, at frontier shiftene i dimension 2 generelt er meget forskellige fra skiftene i de to andre dimensioner, hvorimod skiftene i dimension 1 og dimension 3 er mere ens, da punkterne i plottet øverst til højre overordnet set ligger ret tæt på 45 graders linjerne på nær for omkring 10 punkter, der måske kan karakteriseres som outliers.

Den sidste kvadrant i figuren viser i første linje det gennemsnitlige frontier shift i hver af dimensionerne for alle 162 observationer, der optræder i datasættet for både 2012 og 2013, og i tredje linje vises de vægtede middelværdier T' . I den fjerde linje vises resultatet fra den robuste Hotelling T^2 test for hypotesen om, at alle tre middelværdier er ens ($\mu \text{ ens}$). Den tilhørende p-værdi på 0 forkaster klart denne hypotese, og vi konkluderer, at frontier shiftene er forskellige i de forskellige dimensioner. Efter denne konklusion følger det også automatisk, at hypotesen om, at alle tre middelværdier er lig med 1 (den tredje line, $\mu=1$), vil blive

forkastet. I sidste linje vises test-sandsynlighederne for de parvise (robuste) tests, der sammenligner middelværdierne to ad gangen, og her ses det også, at vi kan forkaste, at nogen af dem er ens. Der er altså stadig signifikante forskelle mellem frontier shiftene i dimension 1 og dimension 3 (men det er den sammenligning med den klart største værdi af test-størrelsen i dette tilfælde).

Kigges der nærmere på elementerne i testene, illustreres først, hvilken effekt det har at anvende robuste estimater af lokation og spredning vha. MCD. Betragt følgende plots fra funktionen 'CovMcd' i R-pakken 'rrcov':



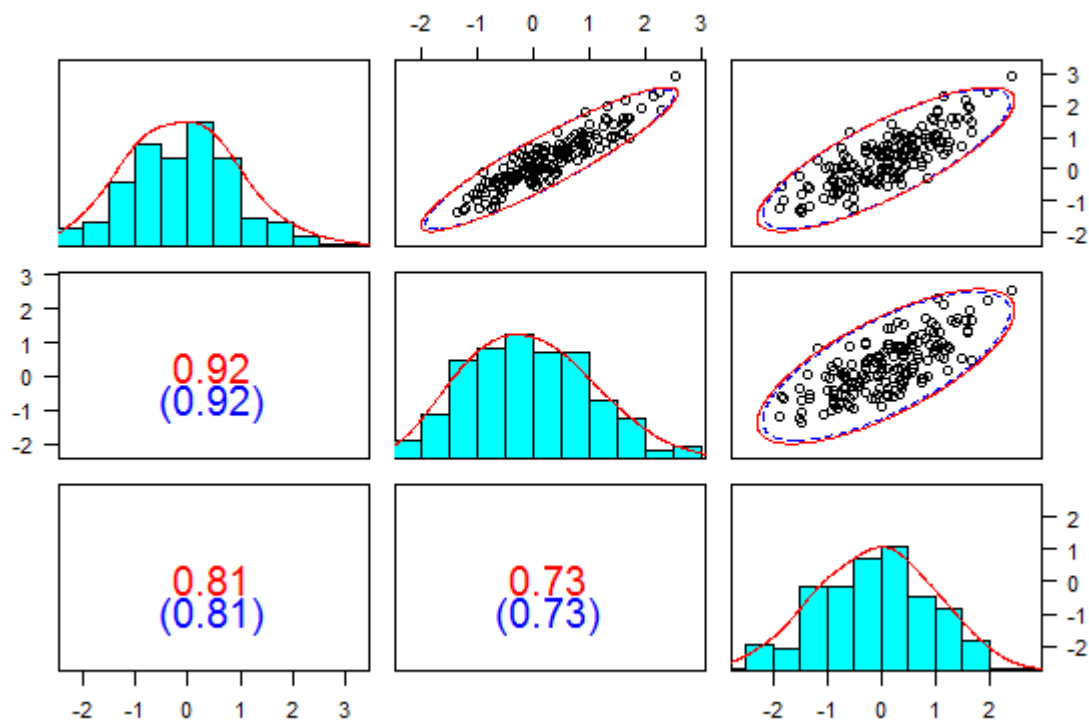
Figur 7: Illustration af brugen af MCD til robust estimat af lokation og spredning for frontier shiftene i de forskellige dimensioner for skiftet 2012-2013.

Histogrammerne i diagonalen af Figur 7 viser de endimensionale fordelinger af frontier shiftene i de tre dimensioner, dvs. dem der også er illustreret i Figur 3. I hvert af plottene i cellerne oven for diagonalen illustrerer den blå ellipse den todimensionale fordeling af frontier shiftene baseret på alle observationer. Centrum af ellipsen angiver lokationen (middelværdi-vektoren), og længden hhv. højden af ellipsen angiver spredningen i hver af de to dimensioner. De røde ellipser i plottene illustrerer derimod de robuste todimensionale fordelinger, der vil blive estimeret ved brug af MCD. Hvis centrum i de to ellipser er meget forskellige, indikerer det, at middelværdierne er meget påvirkede af outliers. Jo større forskel der er på størrelserne af ellipserne (i enten højden eller bredden), desto mere vil estimerne for spredningen (kovariansmatricen) være påvirket af outlierne. Så overordnet set indikerer forskelle mellem de blå og de røde ellipser, at det er hensigtsmæssigt at anvende en robust test som den foreslående robuste Hotelling T^2

test i stedet for at anvende tests, der er baseret på antagelser om normalfordelte variable. I tilfældet illustreret ovenfor observeres der store forskelle mellem de to ellipser.

Og endelig så viser tallene i cellerne neden for diagonalen de parvise korrelationer mellem frontier shiftene i to dimensioner ad gangen, dvs. i de sammenhænge der også er illustreret vha. scatterplottene i Figur 6. De blå tal er korrelationerne baseret på alle observationer, og de røde tal er korrelationerne baseret på den vægtning af observationerne, der sker ved brug af MCD (hvor outliers vægtes med 0). Her ser vi, at den højeste korrelation klart er mellem d1 og d3 svarende til den meget tydeligere lineære sammenhæng mellem disse to frontier shifts i Figur 6 end for de andre parvise sammenligninger.

Til sammenligning er der konstrueret et tilfælde med samme antal observationer (164) som ovenfor, men hvor data er trukket fra en tredimensional normalfordeling. Her ser plottet ud som følger:



Figur 8: Illustration af plots svarende til figur 7, men hvor observationerne kommer fra en tredimensional normalfordeling

Det bemærkes i Figur 8, at de røde og de blå ellipser er ens, da data rent faktisk kommer fra en multi-dimensional normalfordeling. Tilsvarende er korrelationerne ens, uanset om alle observationerne betragtes eller kun de observationer, der ikke vil blive defineret som outliers i MCD (hvilket meget få bliver, da data jo er normalfordelt). Størrelsen af korrelationerne er defineret i simuleringen af datapunkterne.

3. Konklusion

I afsnit 2.1. er foreslået en metode, der kan anvendes til at estimere de variabelspecifikke frontier shifts, der viser, hvor meget den estimerede best practice ændrer sig over tid i hver outputdimension. Metoden kan uden videre tilpasses til at estimere ændringerne i input-dimensionerne eller til en kombination af ændringerne i både input- og output-dimensionerne. I afsnit 2.2 vises, at disse ændringer ikke generelt kan antages at være normalfordelte, og derfor er der i afsnit 2.3 foreslået en metode, der kan anvendes til at teste, om ændringerne er signifikante og også, om ændringerne er de samme i forskellige dimensioner.

Ved hjælp af disse metoder vil det være muligt formelt at analysere, om f.eks. en ændret regulering har medført signifikante forbedringer eller signifikante forværringer af produktionsmulighederne. Derudover kan det analyseres, om ændringer har medført, at det f.eks. er blevet muligt at reducere inputtet af arbejdskraft mere, end det har været muligt at reducere de variable omkostninger, dvs. hvilke produktionsfaktorer ændringen overvejende har påvirket. Eller med andre ord om forbedringer i produktionsmulighederne i højere grad er arbejdskraftsbesparende end råvarebesparende. Alternativt kan tilsvarende problemstillinger analyseres for outputtet af produktionen, f.eks. om forbedringer i produktionsmulighederne over tid for en mælkeproducent i højere grad kommer fra mælkeindtægterne end fra de øvrige indtægter.

Referencer:

Asmild, M., Balezentis, T. og Hougaard, J.L. (2016), Multi-directional Productivity Change: MEA-Malmquist, *Journal of Productivity Analysis*, 46(2), pp. 109-119.

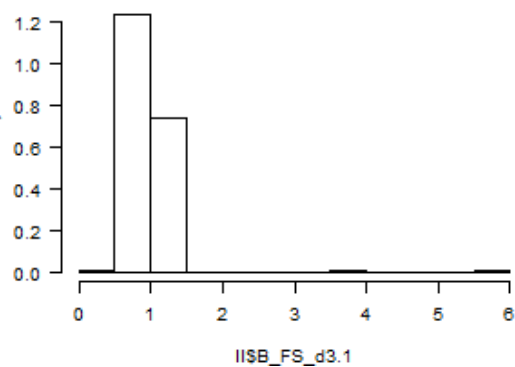
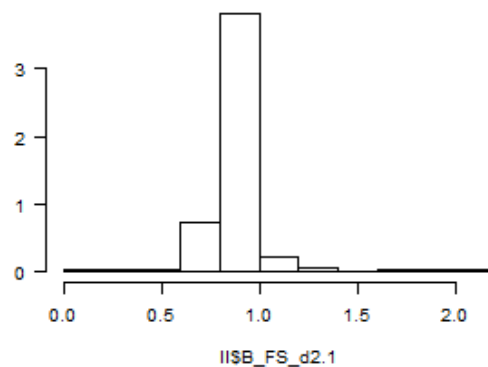
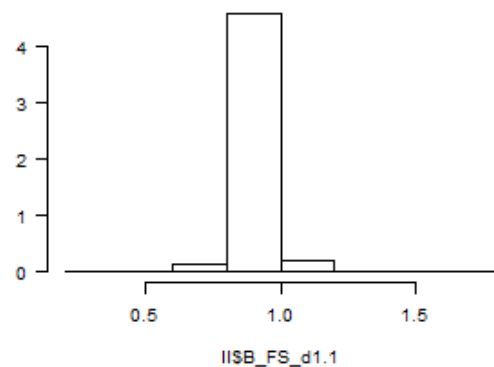
Asmild, M., Lind, K.M.H. og Zøbbe, H. (2015), Landbrugsbarometer 2015: en vurdering af dansk landbrugs relative konkurrenceevne udtrykt ved udnyttelse af produktionsmuligheder og driftsledelse, IFRO Udredning; Nr. 2015/30.

Pastor, J.T., Asmild, M. og Lovell, C.A.K. (2011), The Biennial Malmquist Productivity Change Index, *Socio-Economic Planning Science*, 45, pp. 10-15.

Willems, G., Pison, G., Rousseeuw, P. and Van Aelst, S. (2002), A robust Hotelling test, *Metrika* 55, pp. 125-138 (<https://pdfs.semanticscholar.org/9706/007b4c46e62422d8bc35c5df2f1828beeb9ea.pdf>)

Appendiks 1: Histogrammer og Jarque-Bera normalitetstest for alle frontier shifts 1994-2012.

1994 vs 1995



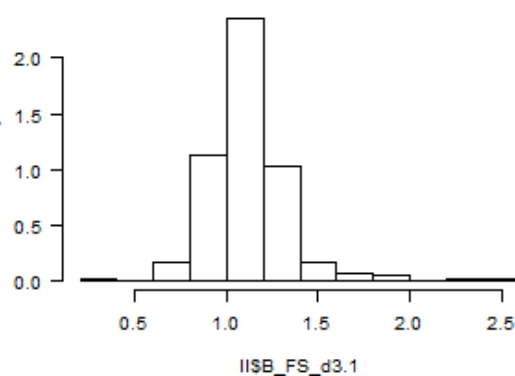
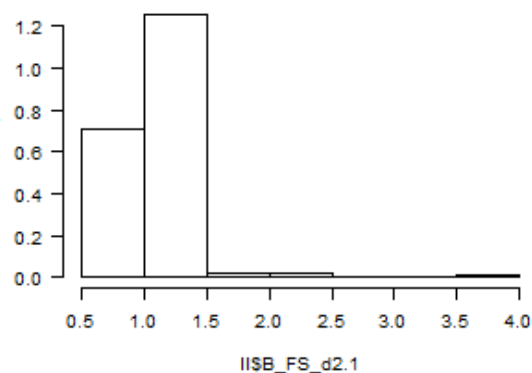
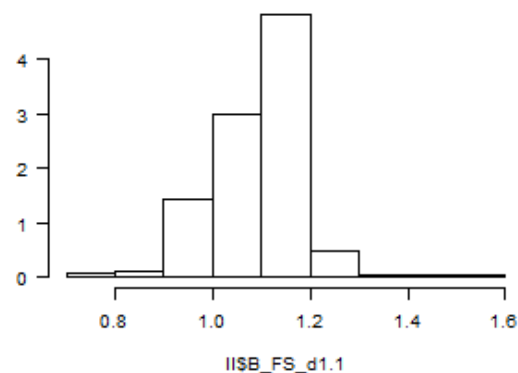
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 6242.8206 p= 0

d2: JB= 4805.8292 p= 0

d3: JB= 102612.3202 p= 0

1995 vs 1996



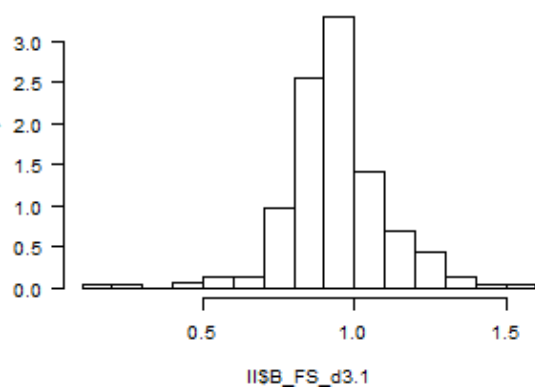
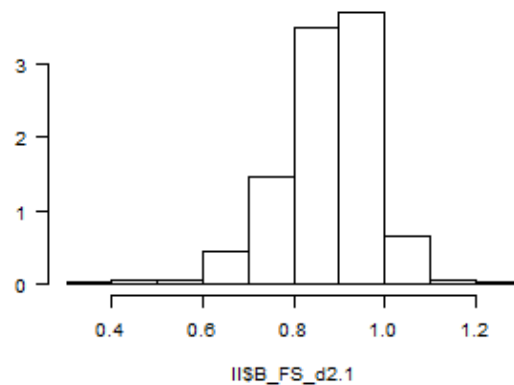
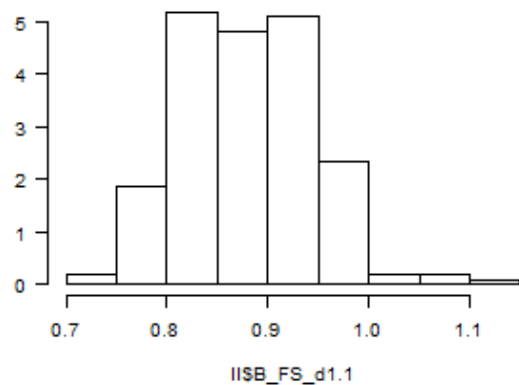
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 169.9379 p= 0

d2: JB= 597457.7608 p= 0

d3: JB= 1026.9332 p= 0

1996 vs 1997



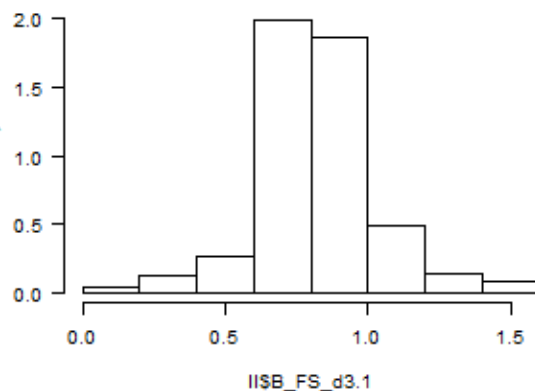
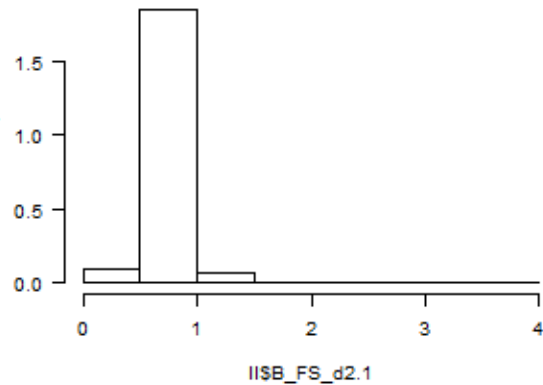
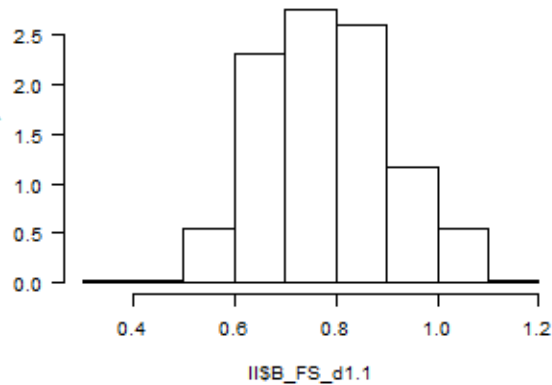
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 4.0629 p= 0.1185

d2: JB= 166.1585 p= 0

d3: JB= 128.7646 p= 0

1997 vs 1998



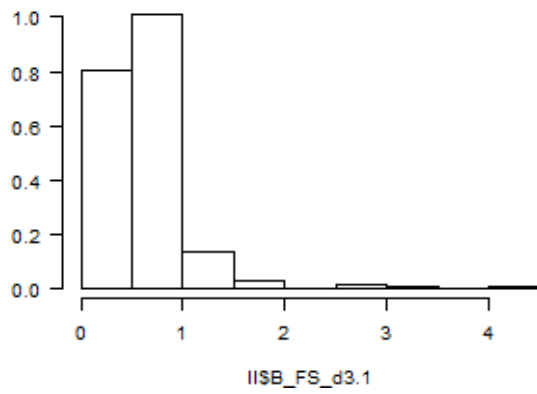
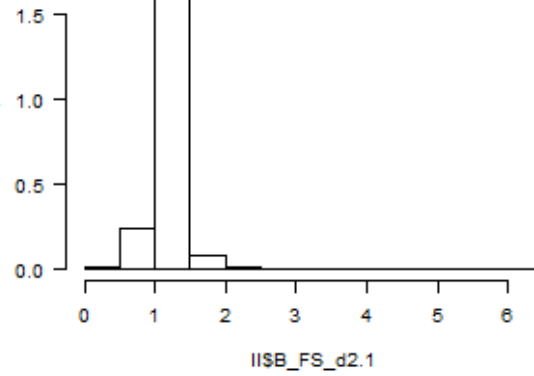
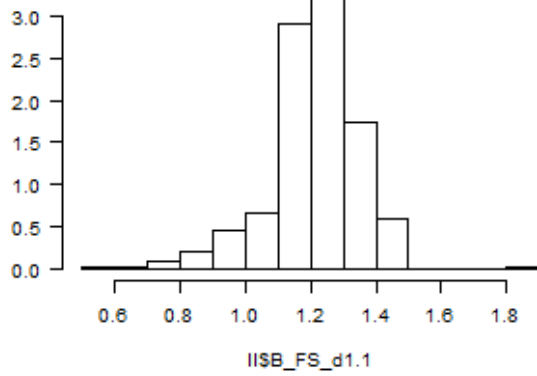
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 1.1216 p= 0.5605

d2: JB= 120624.1925 p= 0

d3: JB= 63.8652 p= 0

1998 vs 1999



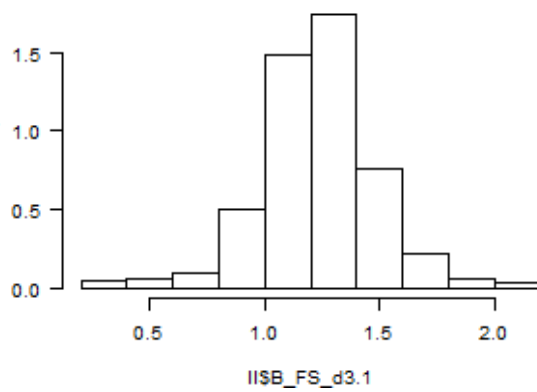
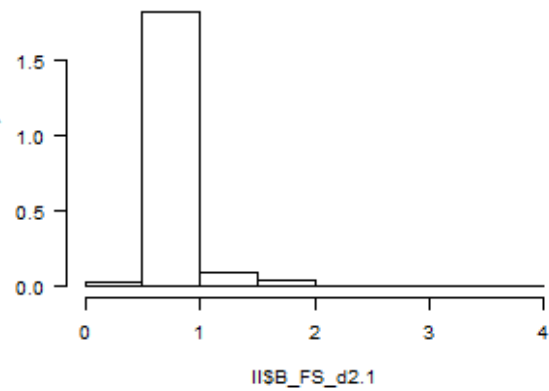
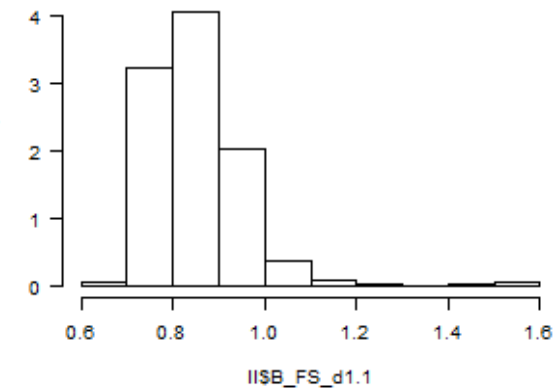
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 146.9592 p= 0

d2: JB= 55135.3073 p= 0

d3: JB= 10020.7364 p= 0

1999 vs 2000



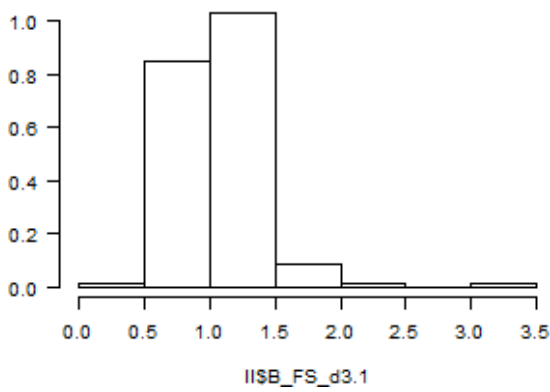
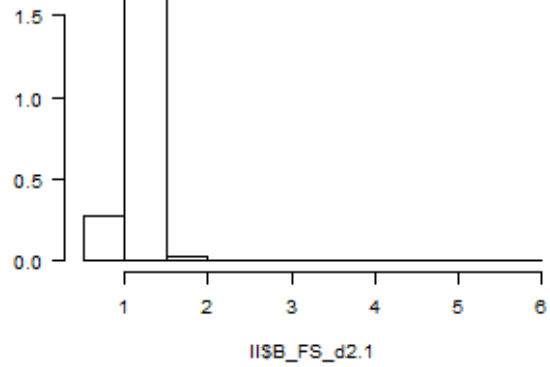
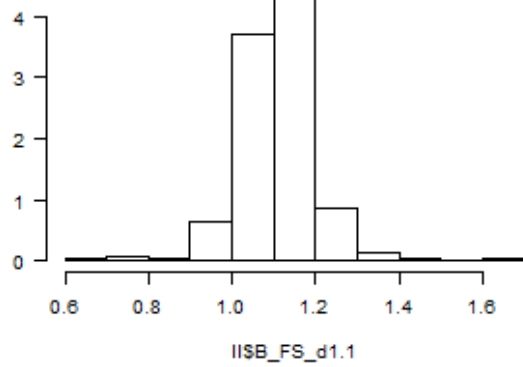
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 16695.7722 p= 0

d2: JB= 855792.7757 p= 0

d3: JB= 63.1015 p= 0

2000 vs 2001



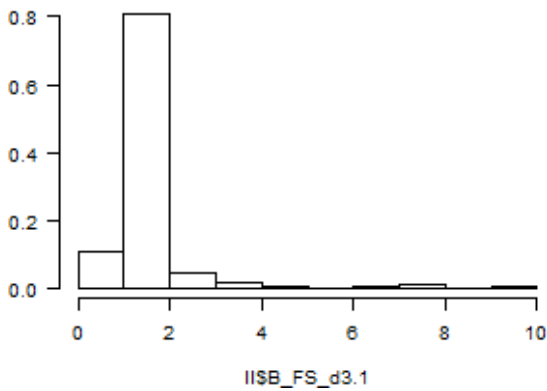
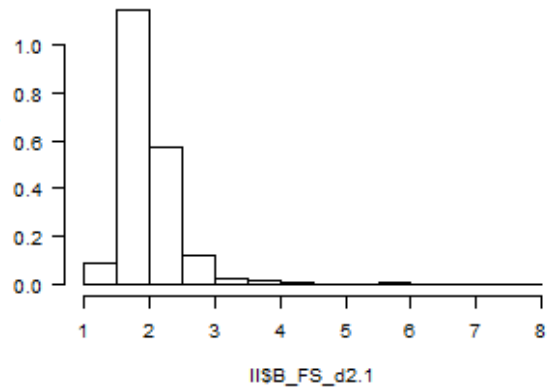
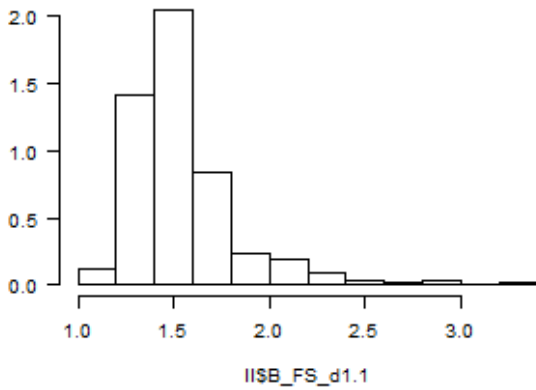
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 514.523 p= 0

d2: JB= 195947.475 p= 0

d3: JB= 9227.7284 p= 0

2001 vs 2002



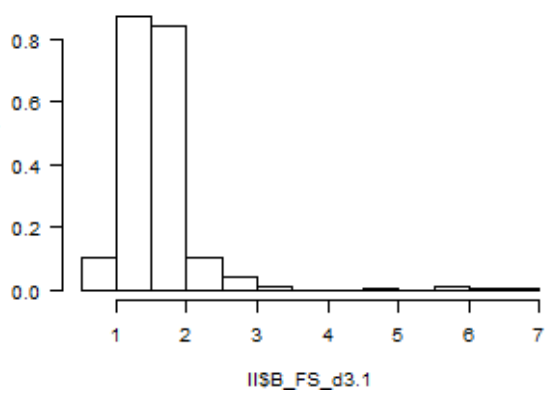
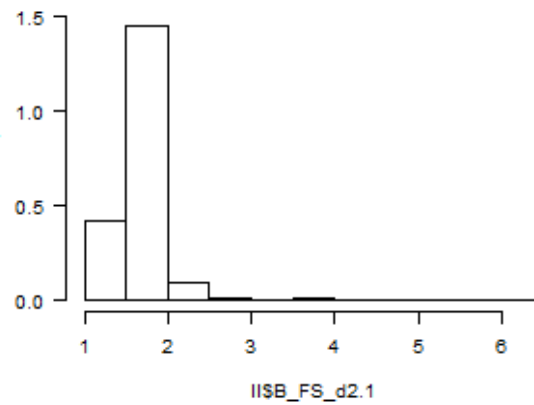
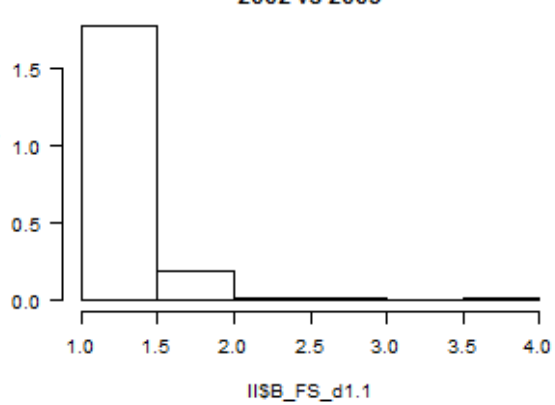
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 1278.6316 p= 0

d2: JB= 322164.1621 p= 0

d3: JB= 39526.3355 p= 0

2002 vs 2003



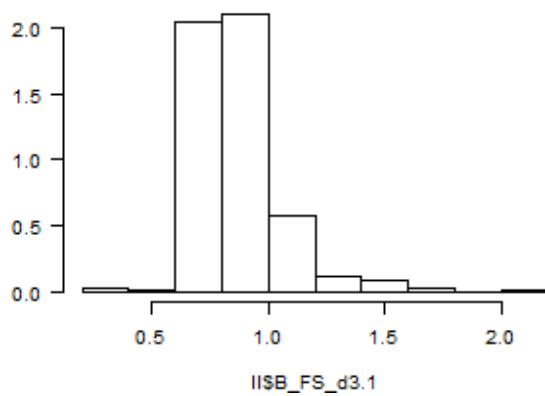
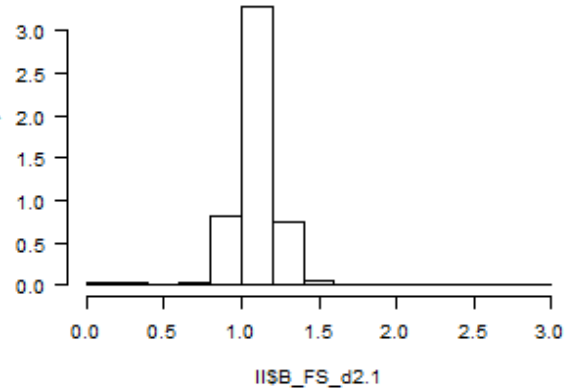
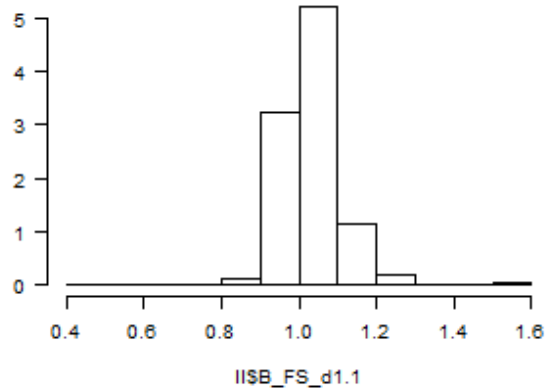
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 47116.3126 p= 0

d2: JB= 32635.1157 p= 0

d3: JB= 1772375.8024 p= 0

2003 vs 2004



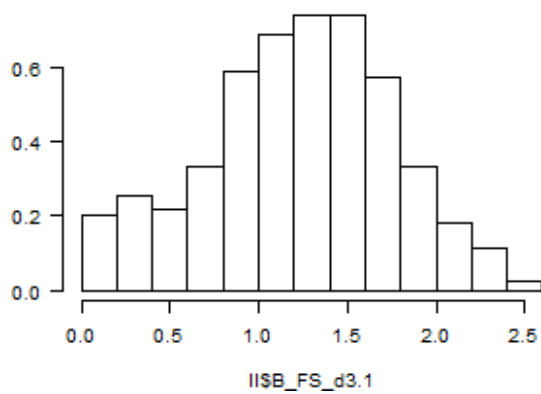
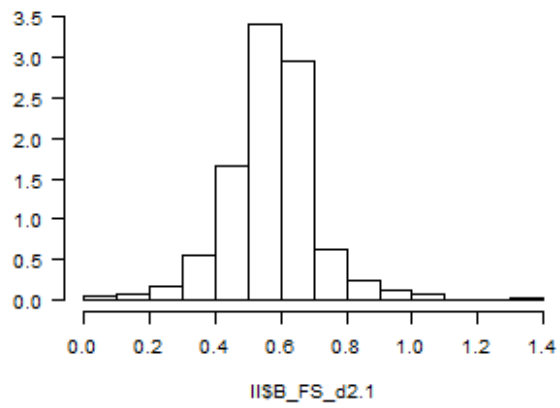
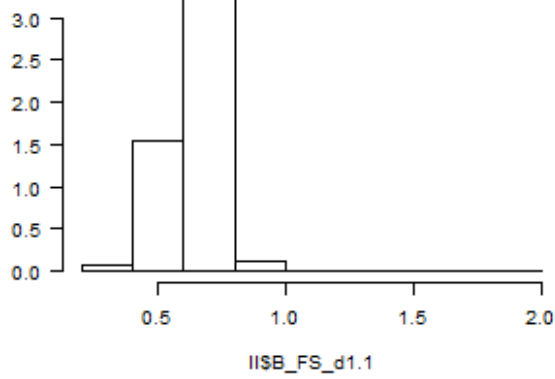
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 4236.3388 p= 0

d2: JB= 75904.7742 p= 0

d3: JB= 1343191.2889 p= 0

2004 vs 2005



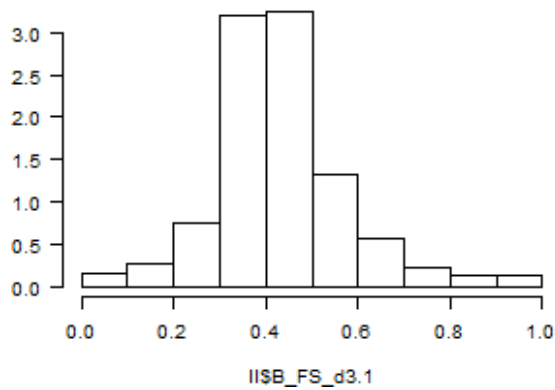
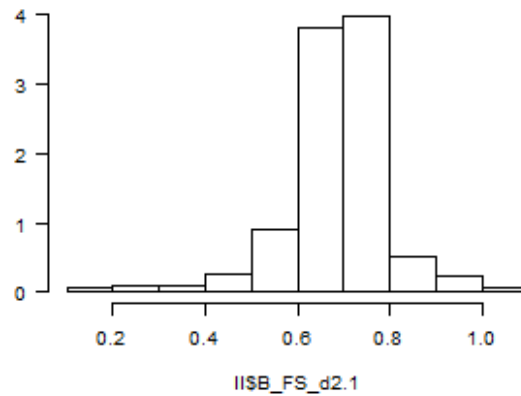
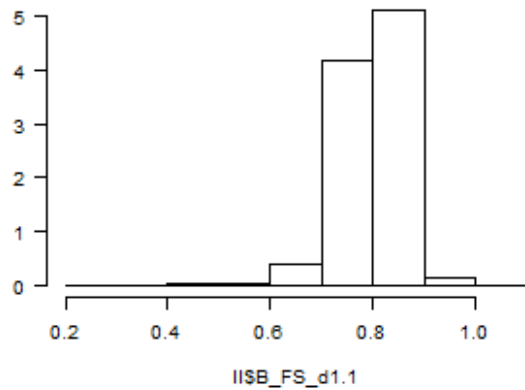
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 21908.4875 p= 0

d2: JB= 272.4188 p= 0

d3: JB= 5.5658 p= 0.0615

2005 vs 2006



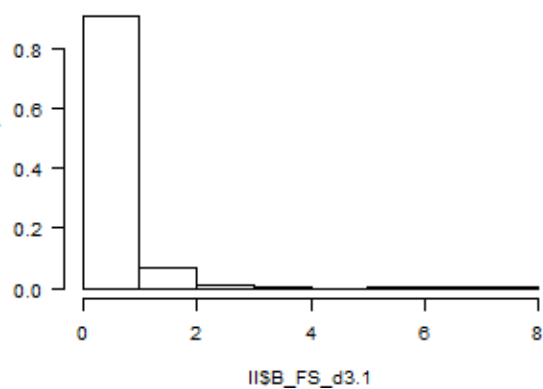
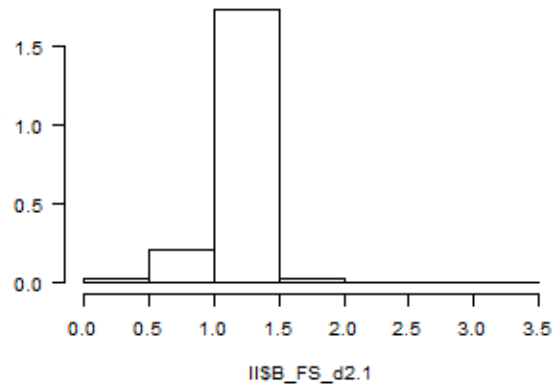
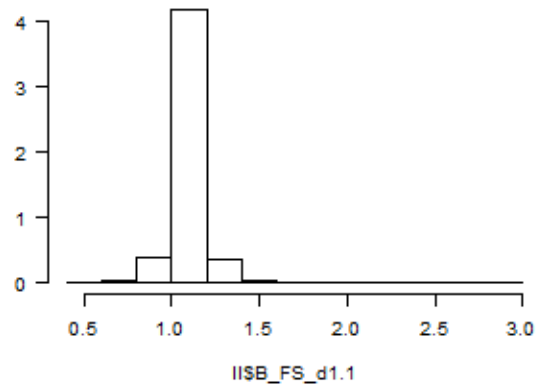
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 3542.3763 p= 0

d2: JB= 592.8433 p= 0

d3: JB= 177.9291 p= 0

2006 vs 2007



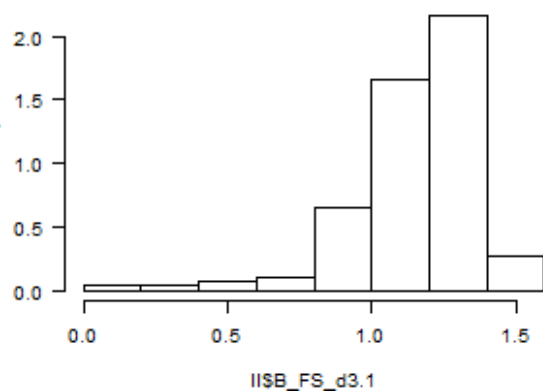
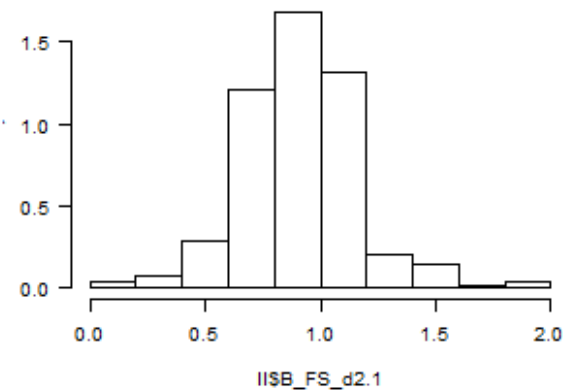
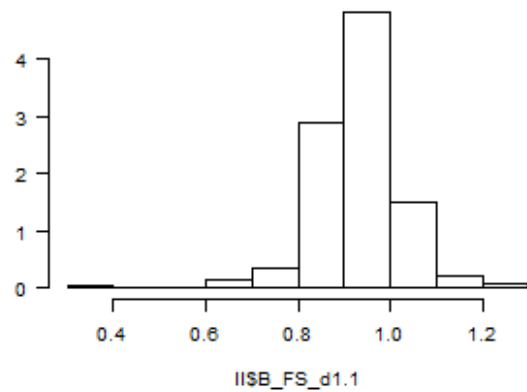
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 153636.5491 p= 0

d2: JB= 14841.3892 p= 0

d3: JB= 70610.2896 p= 0

2007 vs 2008



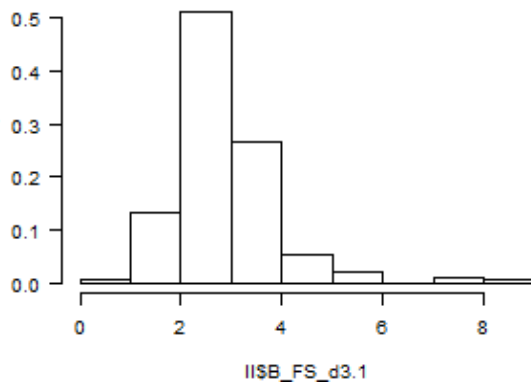
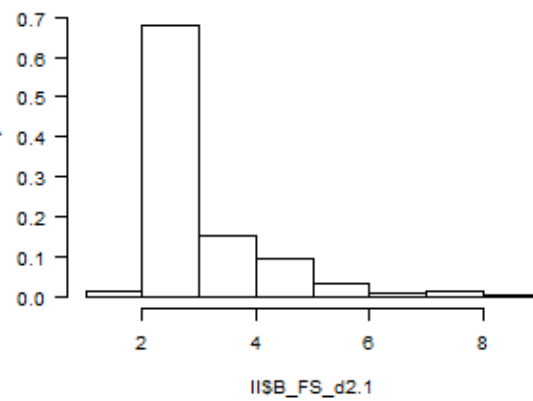
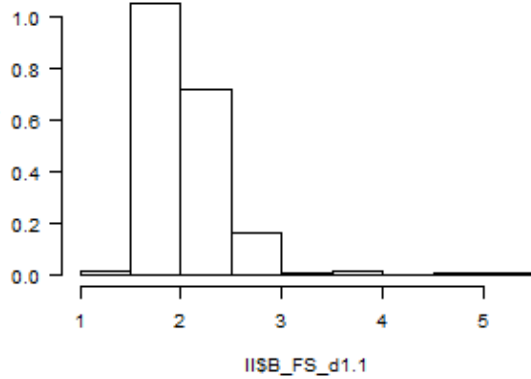
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 322.3059 p= 0

d2: JB= 83.0253 p= 0

d3: JB= 534.7982 p= 0

2008 vs 2009



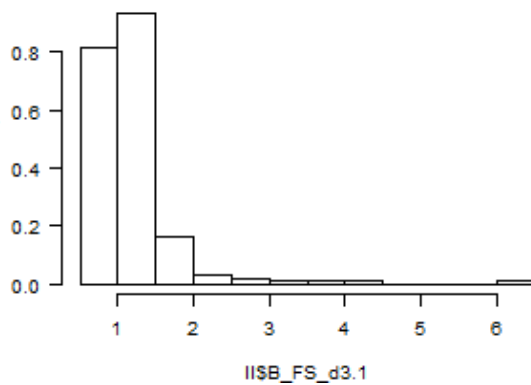
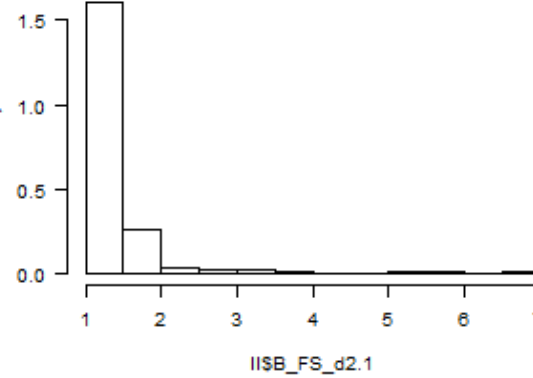
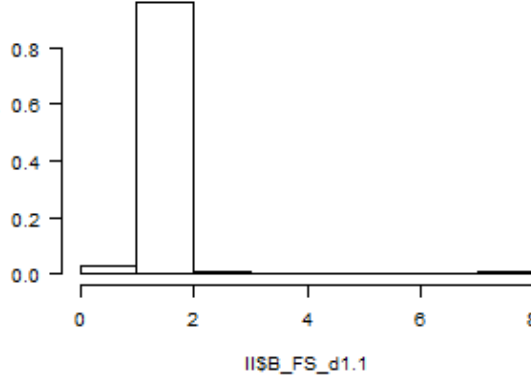
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 41996.4776 p= 0

d2: JB= 6874.9851 p= 0

d3: JB= 126407.6213 p= 0

2009 vs 2010



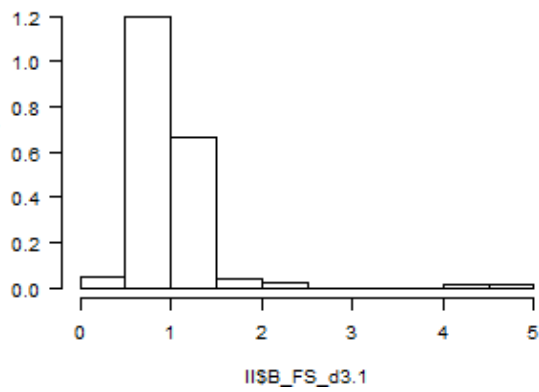
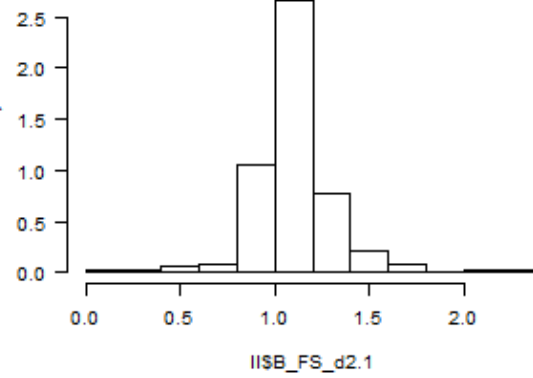
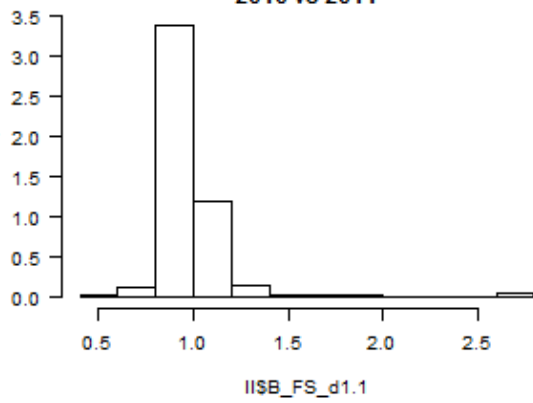
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 208410.7844 p= 0

d2: JB= 322881.2 p= 0

d3: JB= 4210.1773 p= 0

2010 vs 2011



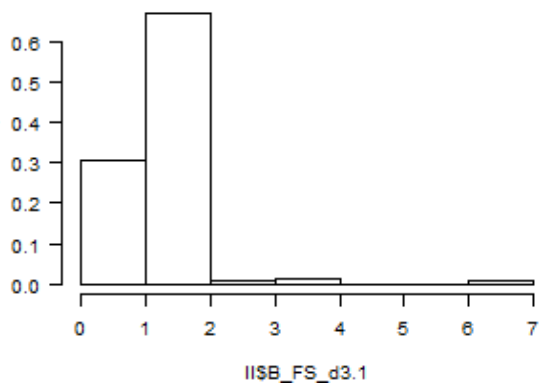
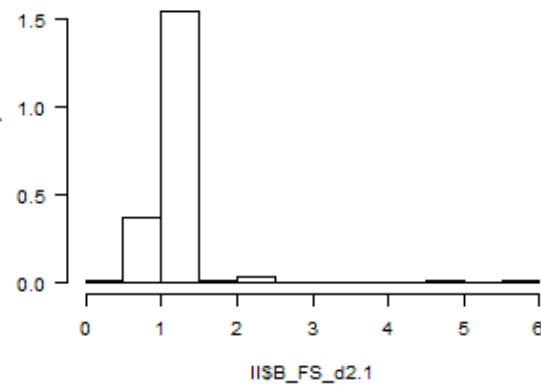
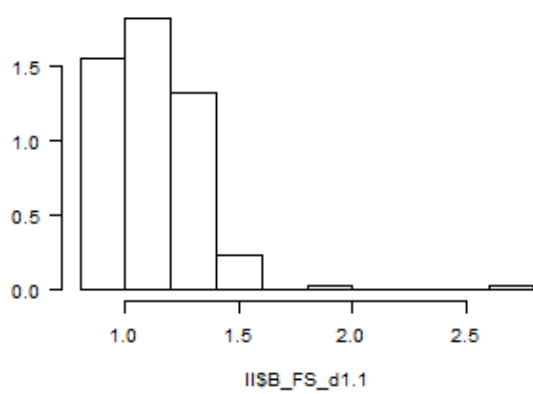
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 11940.5107 p= 0

d2: JB= 266612.8365 p= 0

d3: JB= 75463.7626 p= 0

2011 vs 2012



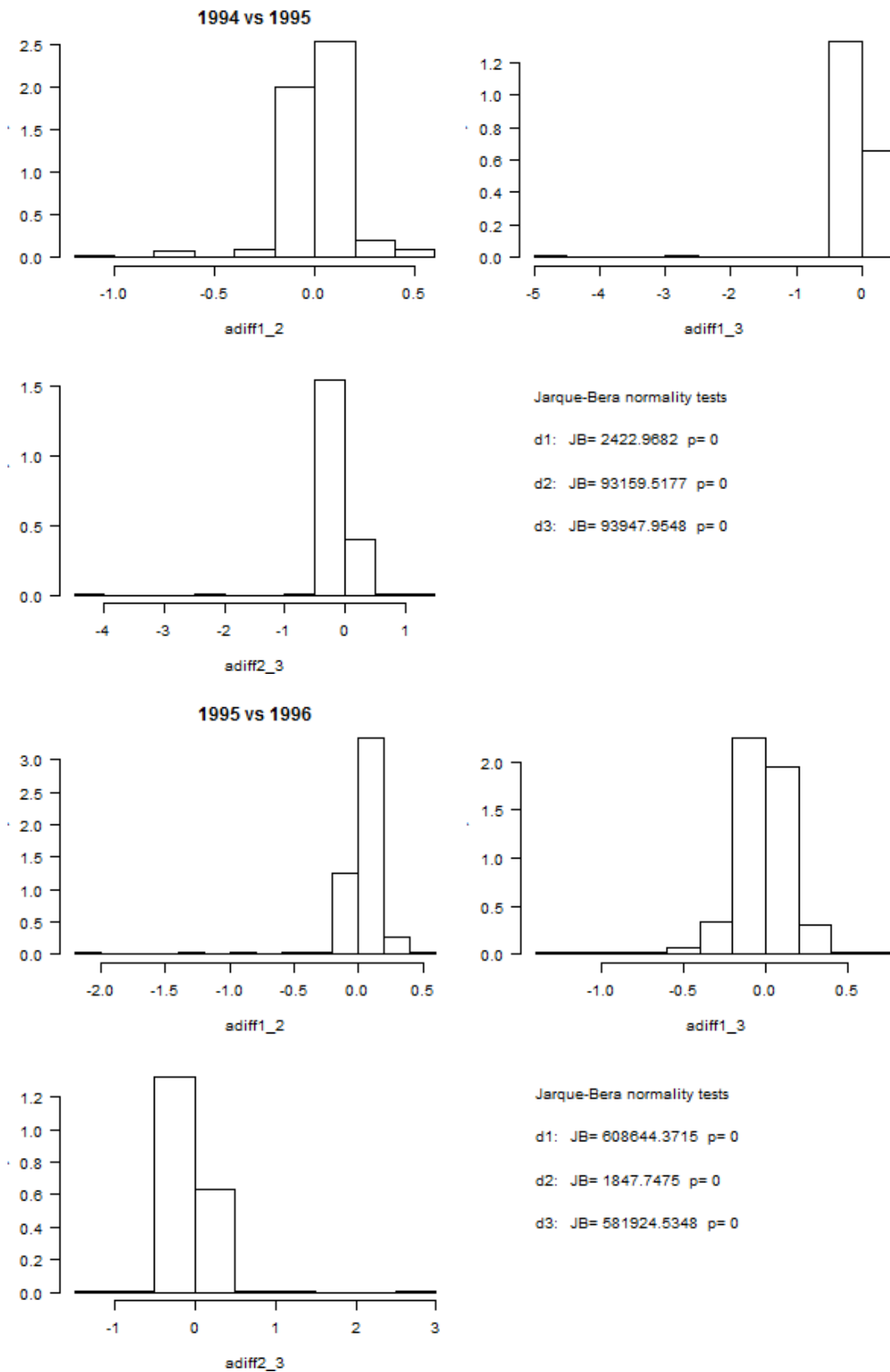
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 2617.7624 p= 0

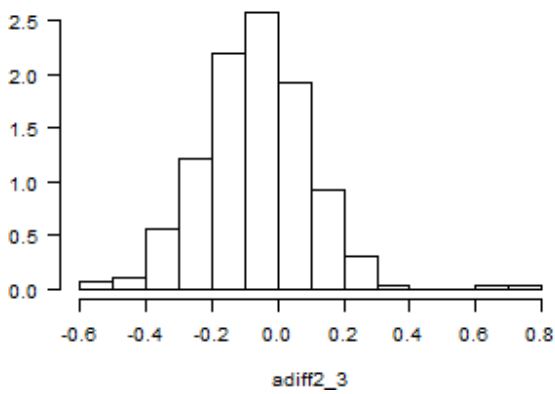
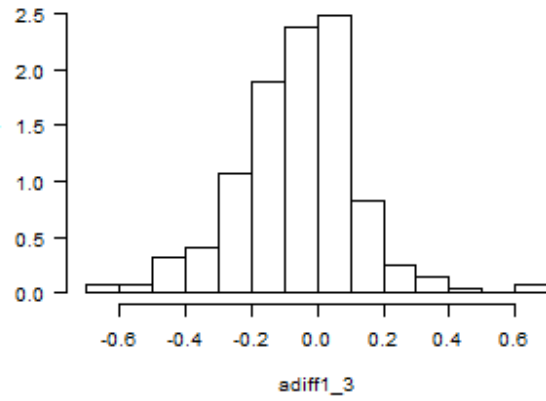
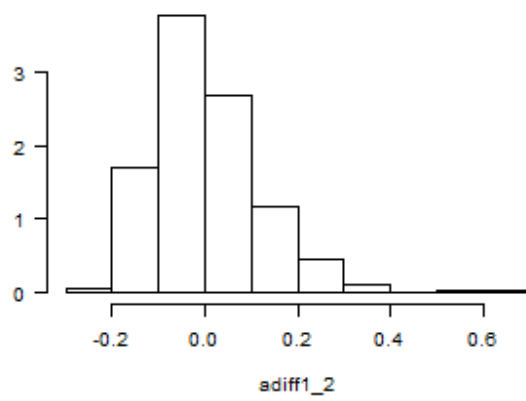
d2: JB= 74805.7089 p= 0

d3: JB= 32946.2971 p= 0

Appendiks 2: Histogrammer og Jarque-Bera normalitetstest for alle absolutte forskelle mellem dimensionsspecifikke frontier shifts 1994-2012.



1996 vs 1997



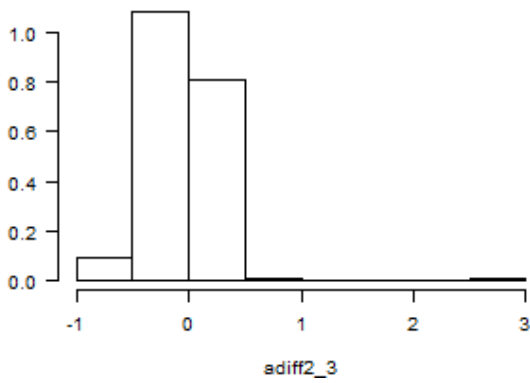
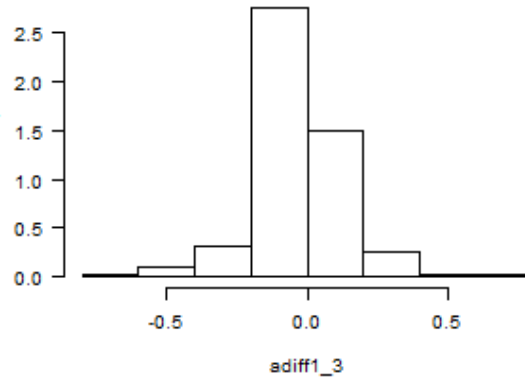
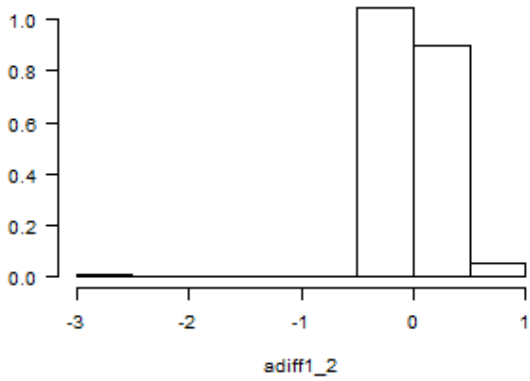
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 188.3796 p= 0

d2: JB= 37.559 p= 0

d3: JB= 111.429 p= 0

1997 vs 1998



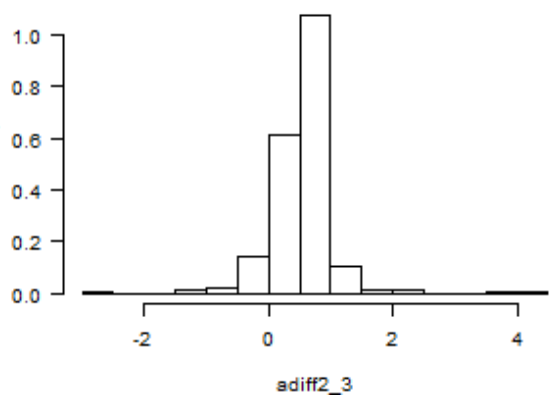
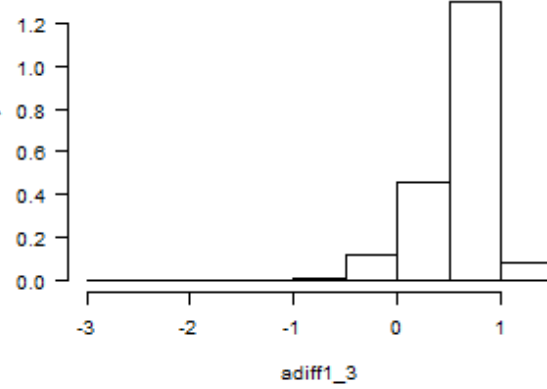
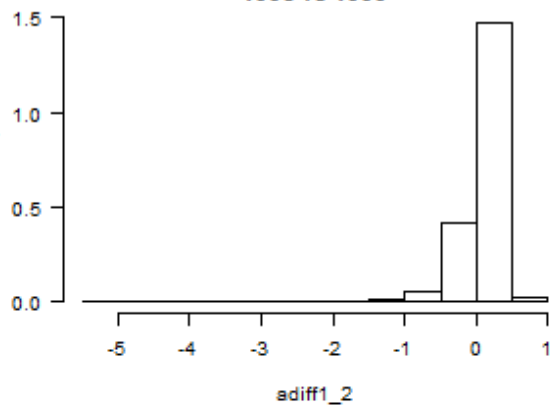
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 39212.5482 p= 0

d2: JB= 251.4812 p= 0

d3: JB= 13572.6125 p= 0

1998 vs 1999



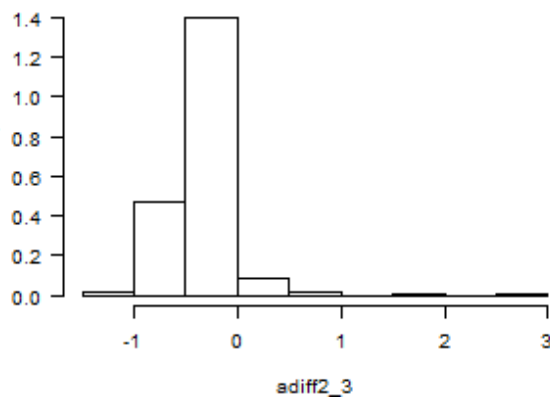
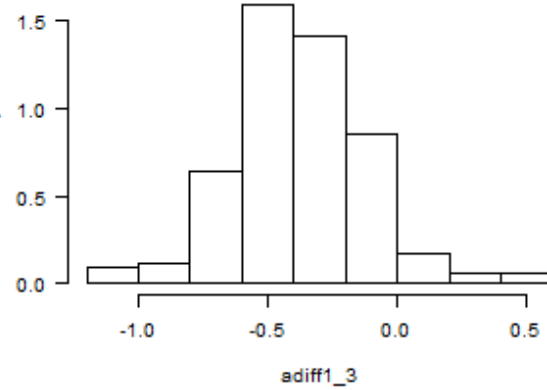
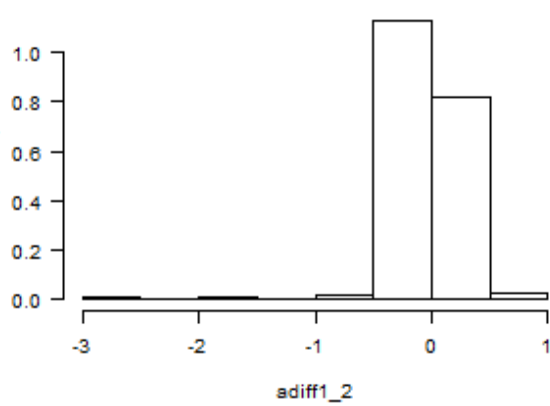
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 62916.5831 p= 0

d2: JB= 6271.2079 p= 0

d3: JB= 4540.0983 p= 0

1999 vs 2000



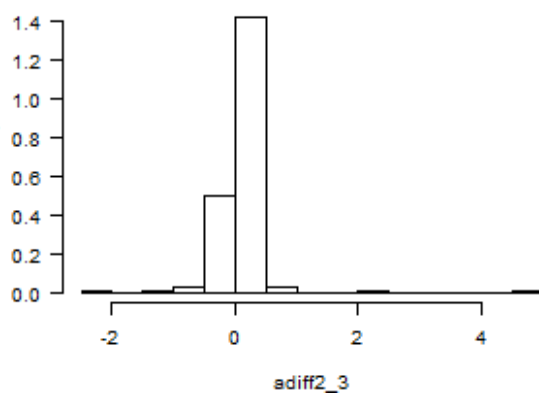
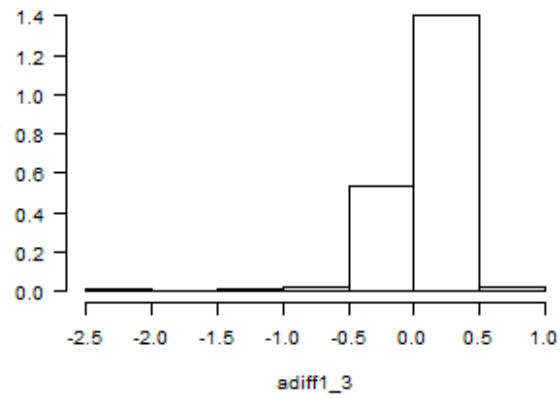
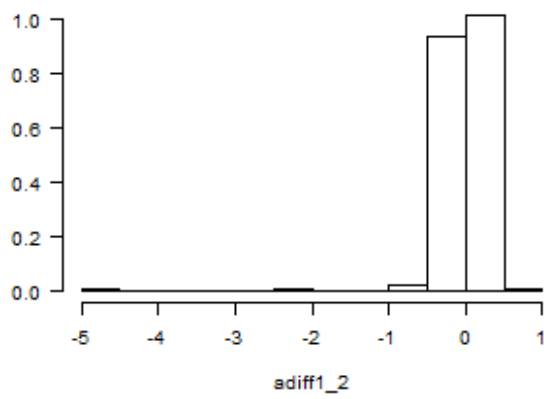
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 820299.412 p= 0

d2: JB= 50.2452 p= 0

d3: JB= 725667.1439 p= 0

2000 vs 2001



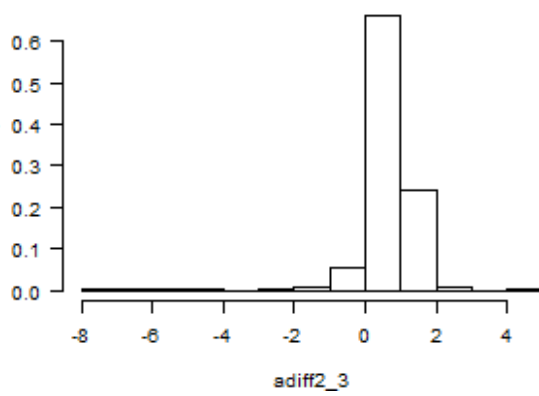
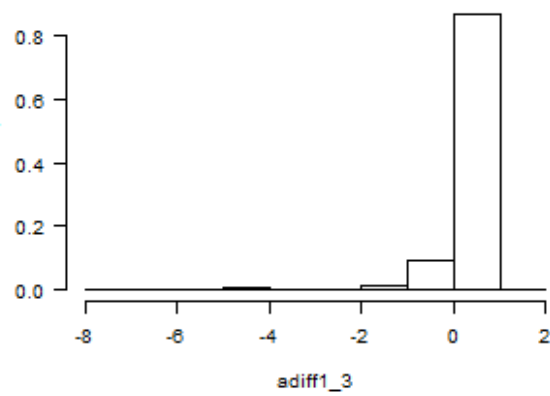
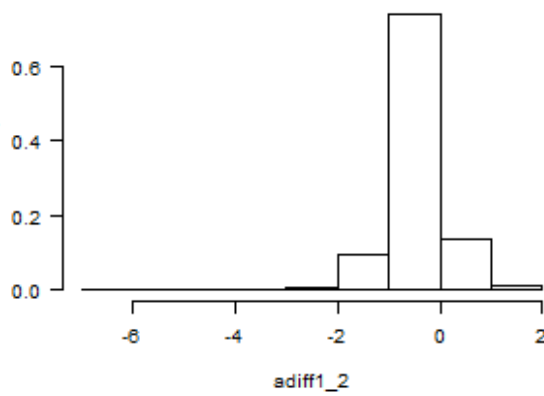
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 221557.1338 p= 0

d2: JB= 14508.634 p= 0

d3: JB= 61512.7819 p= 0

2001 vs 2002



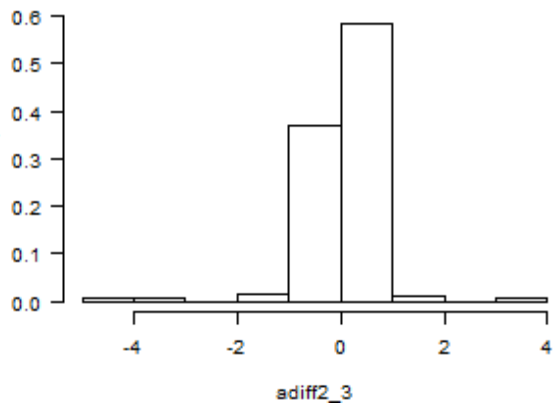
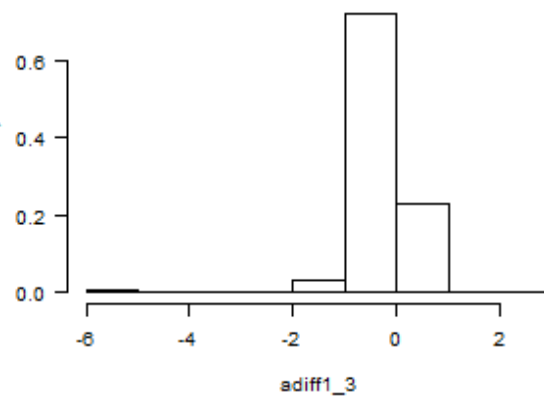
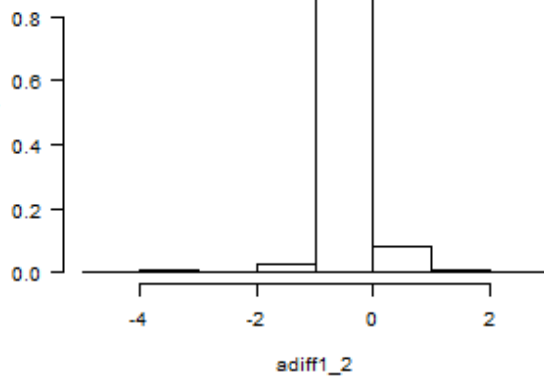
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 280806.6641 p= 0

d2: JB= 70020.69 p= 0

d3: JB= 94949.0805 p= 0

2002 vs 2003



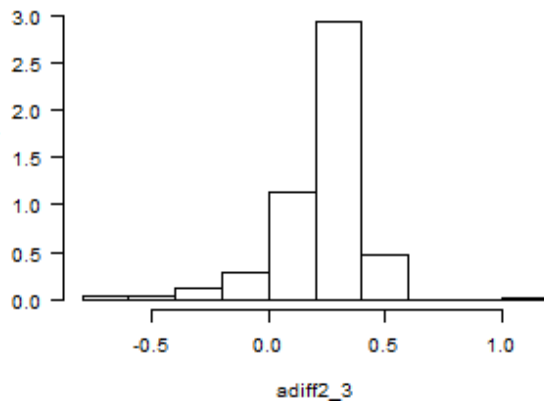
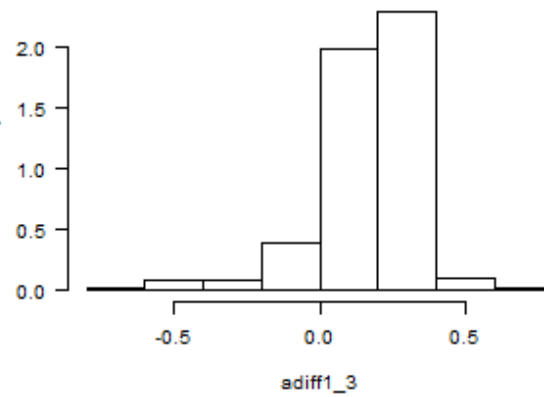
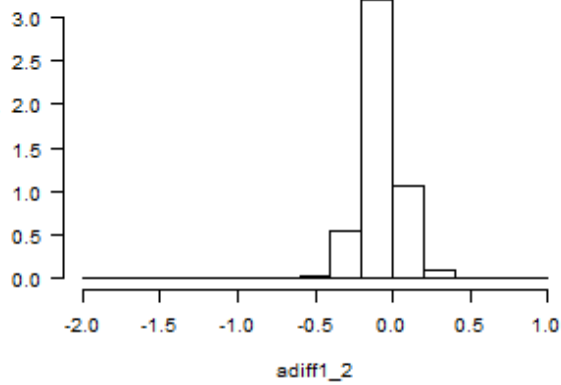
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 12794.5808 p= 0

d2: JB= 1787769.1357 p= 0

d3: JB= 1617763.4051 p= 0

2003 vs 2004



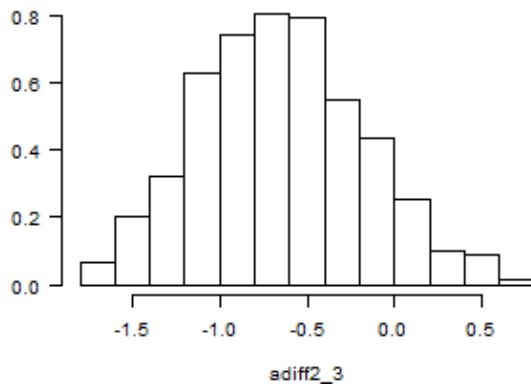
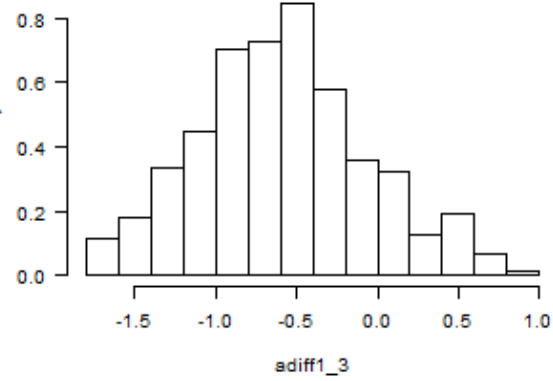
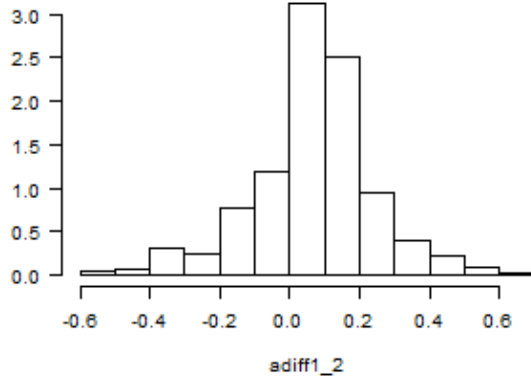
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 91783.4752 p= 0

d2: JB= 1491089.0312 p= 0

d3: JB= 923978.3919 p= 0

2004 vs 2005



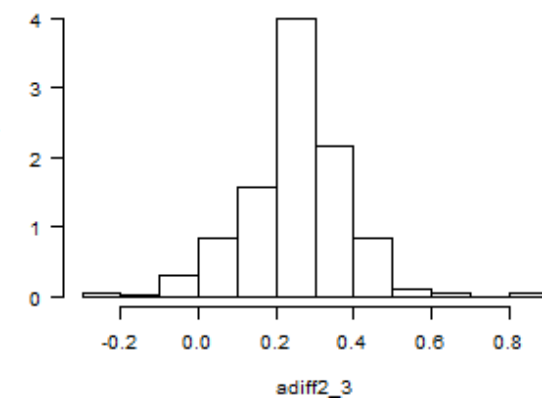
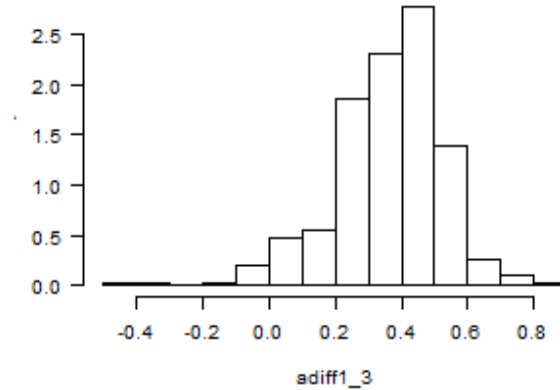
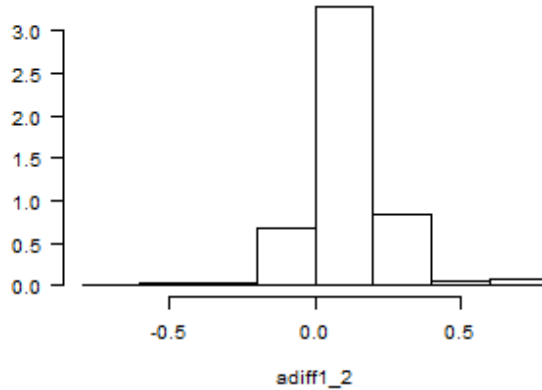
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 44.3506 p= 0

d2: JB= 3.7313 p= 0.123

d3: JB= 4.213 p= 0.1245

2005 vs 2006



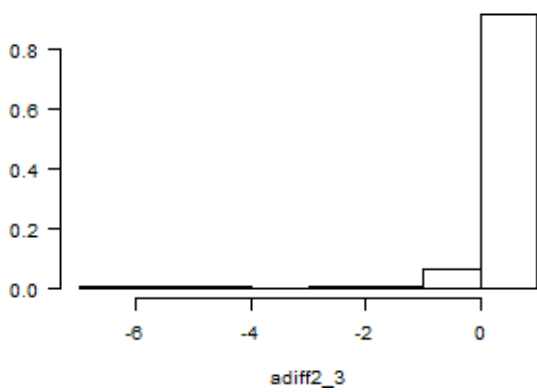
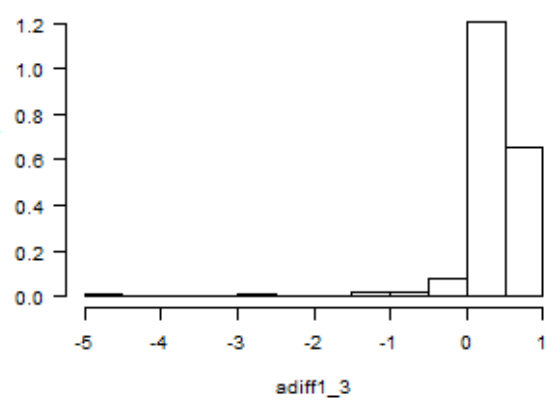
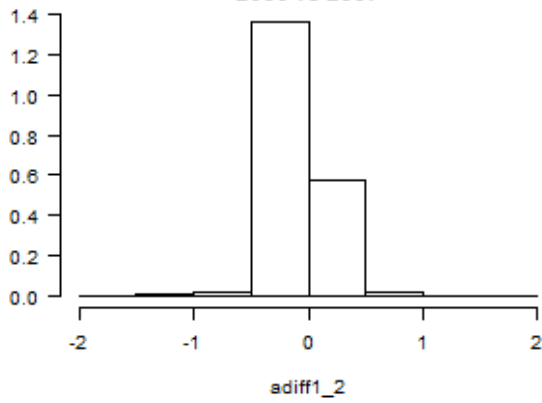
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 599.1196 p= 0

d2: JB= 98.9568 p= 0

d3: JB= 91.1872 p= 0

2006 vs 2007



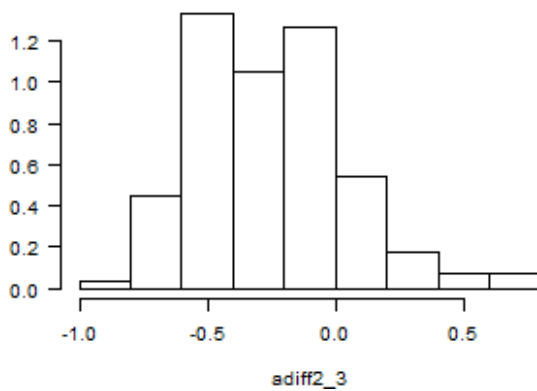
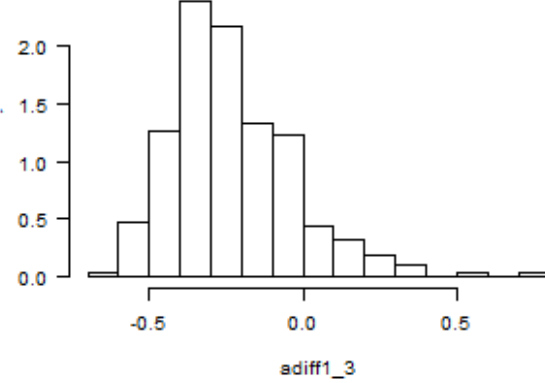
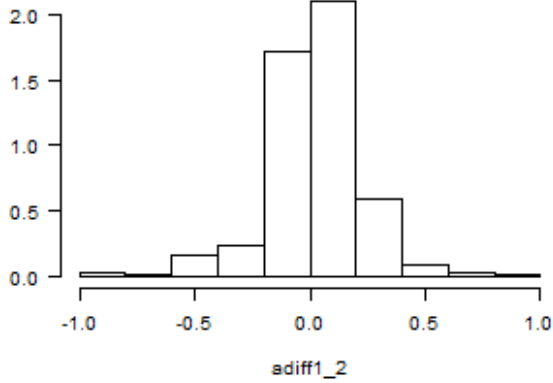
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 12317.471 p= 0

d2: JB= 42037.8333 p= 0

d3: JB= 86902.4709 p= 0

2007 vs 2008



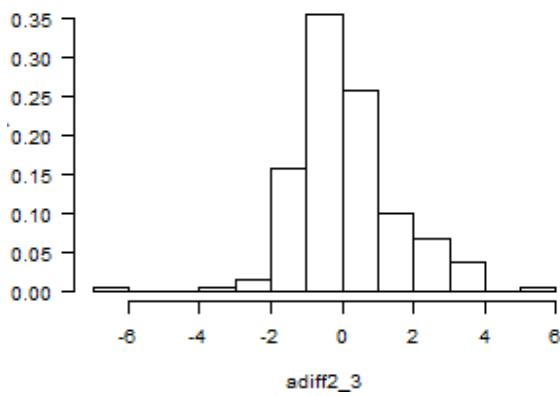
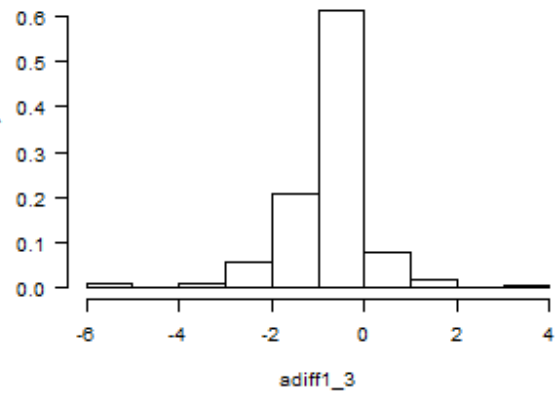
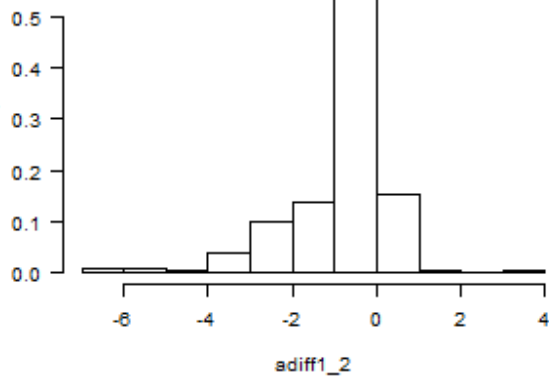
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 237.3947 p= 0

d2: JB= 106.6986 p= 0

d3: JB= 13.774 p= 0.004

2008 vs 2009



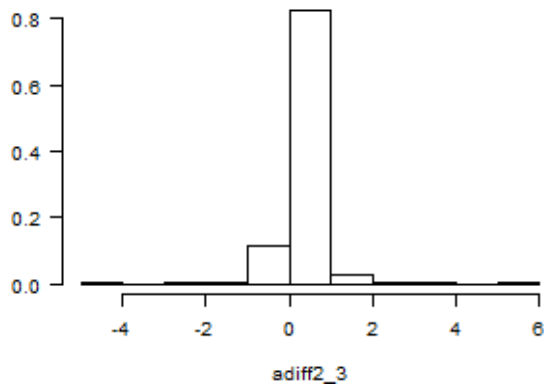
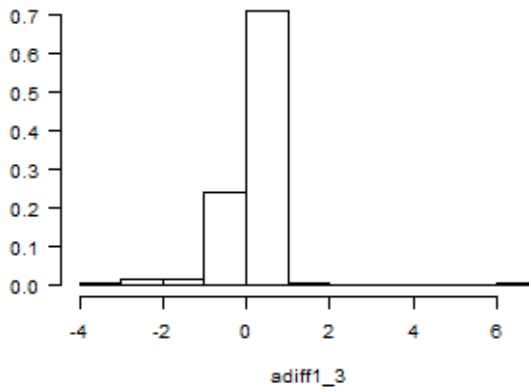
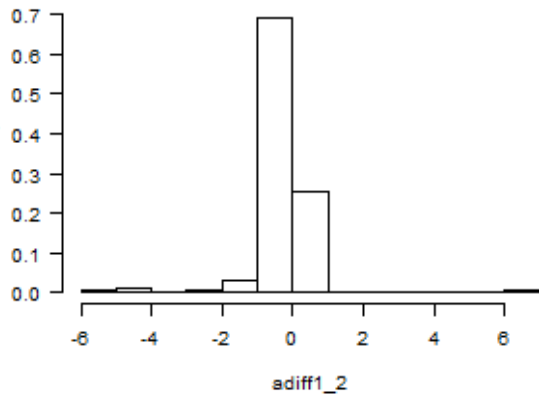
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 6292.9649 p= 0

d2: JB= 159547.386 p= 0

d3: JB= 7881.2999 p= 0

2009 vs 2010



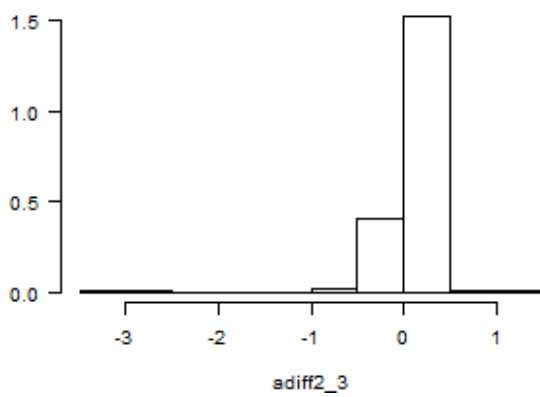
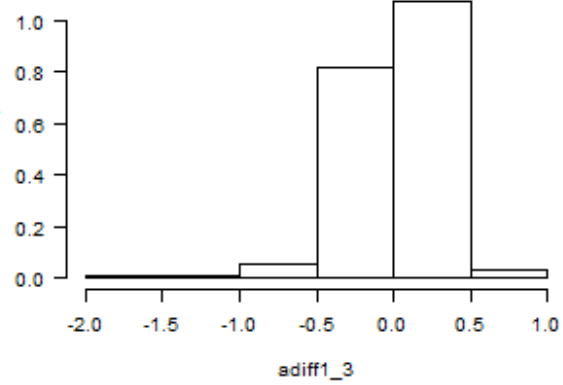
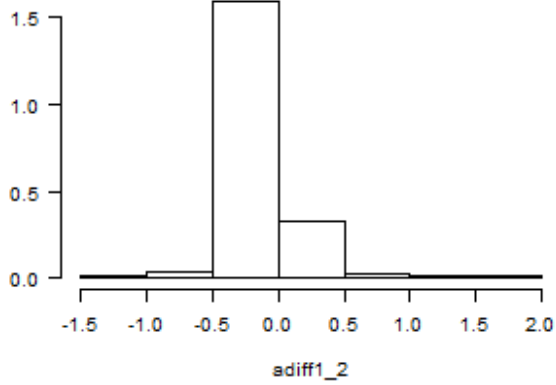
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 322826.3631 p= 0

d2: JB= 7987.6556 p= 0

d3: JB= 323130.1073 p= 0

2010 vs 2011



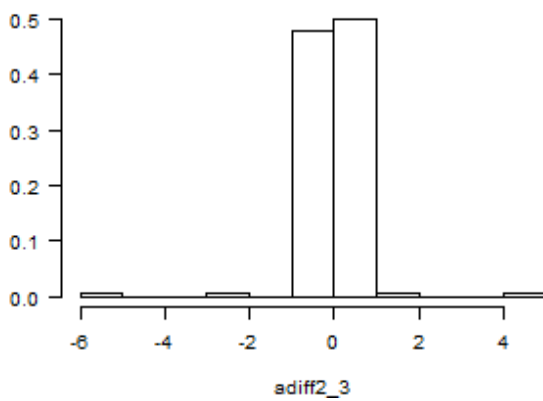
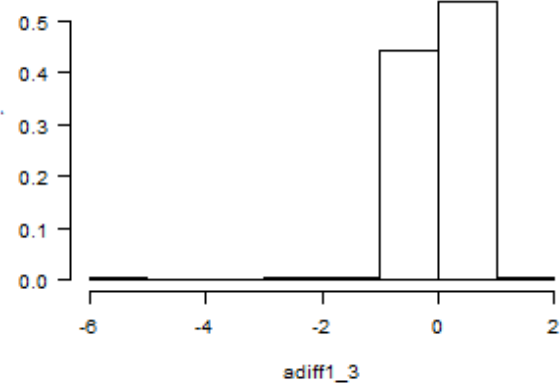
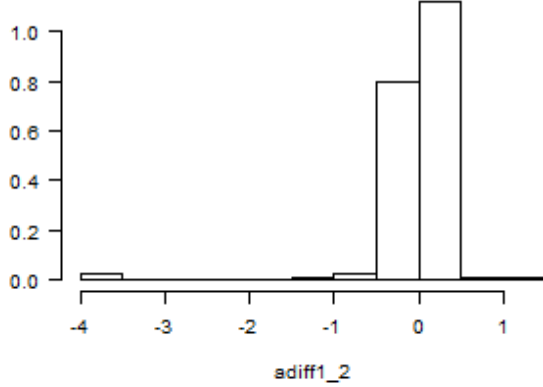
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 262981.504 p= 0

d2: JB= 86997.3378 p= 0

d3: JB= 51254.7597 p= 0

2011 vs 2012



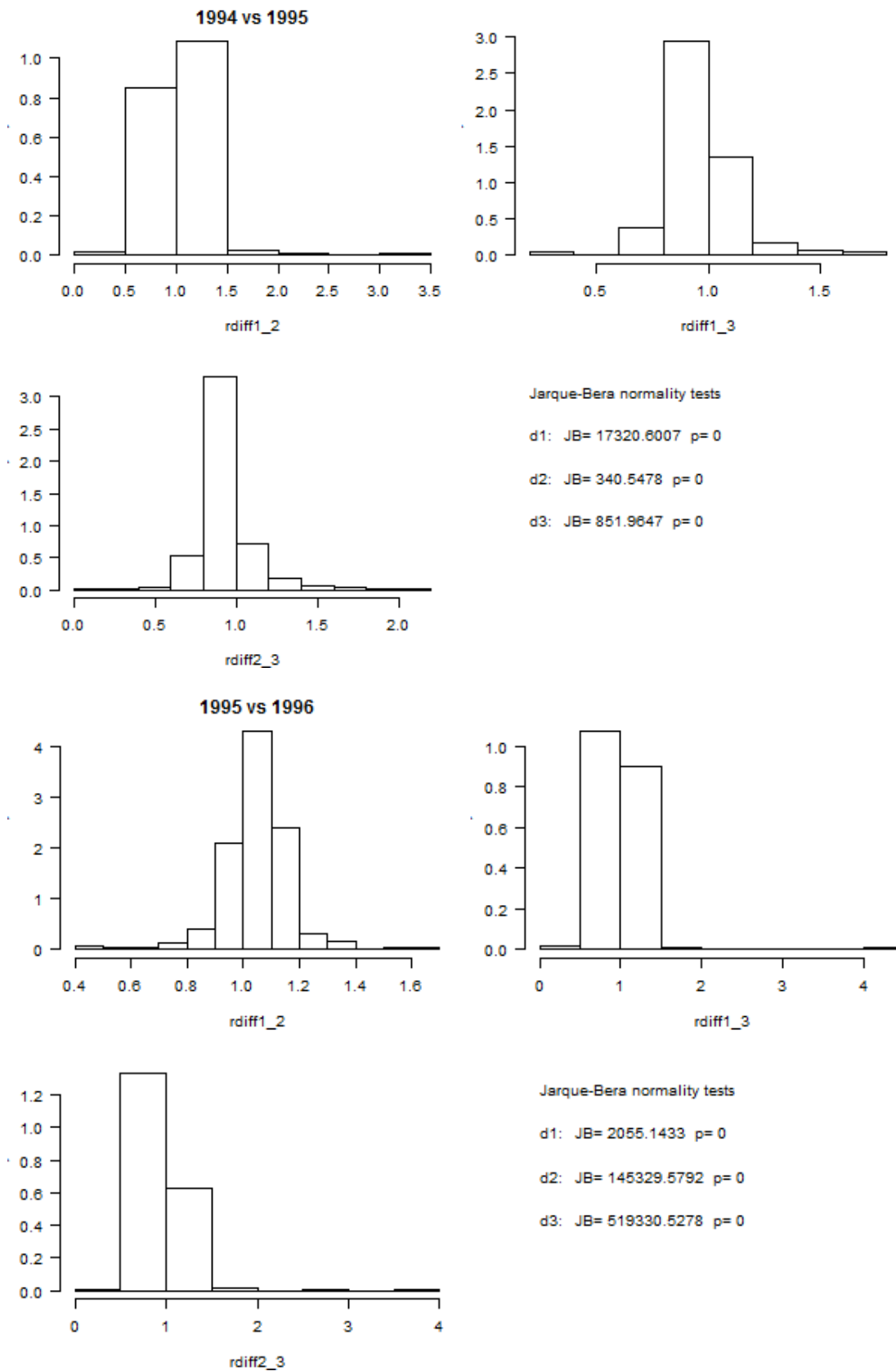
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 90807.7496 p= 0

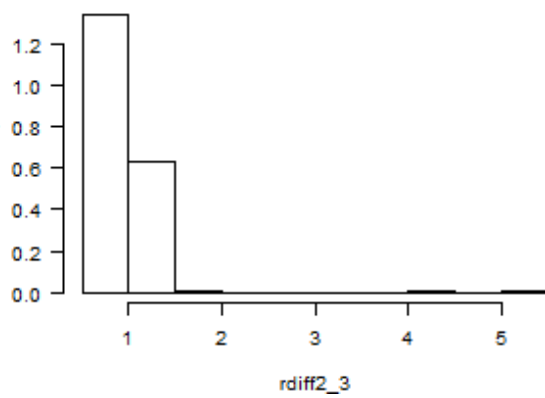
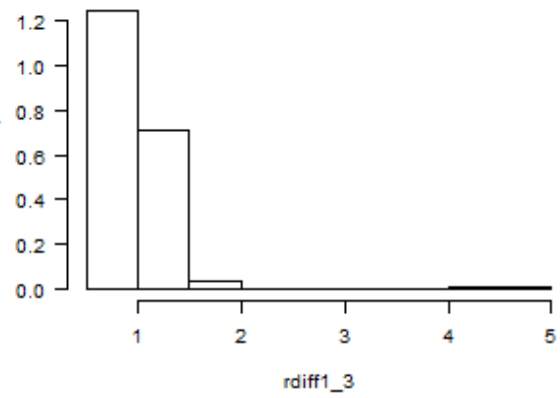
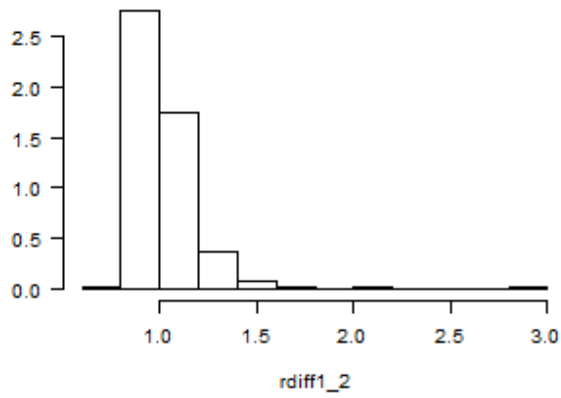
d2: JB= 24569.7987 p= 0

d3: JB= 65761.7077 p= 0

Appendiks 3: Histogrammer og Jarque-Bera normalitetstest for alle relative forskelle mellem dimensionsspecifikke frontier shifts 1994-2012.



1996 vs 1997



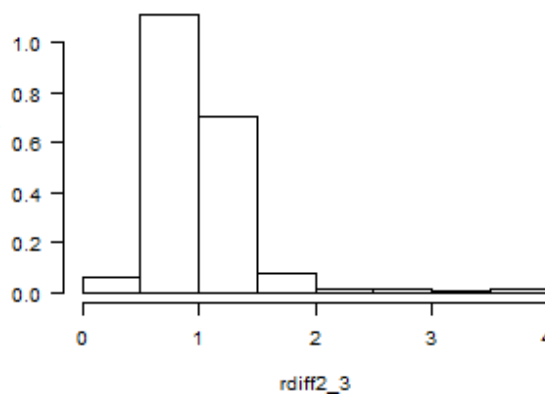
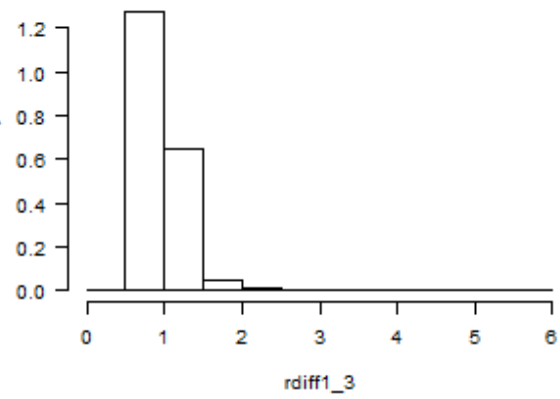
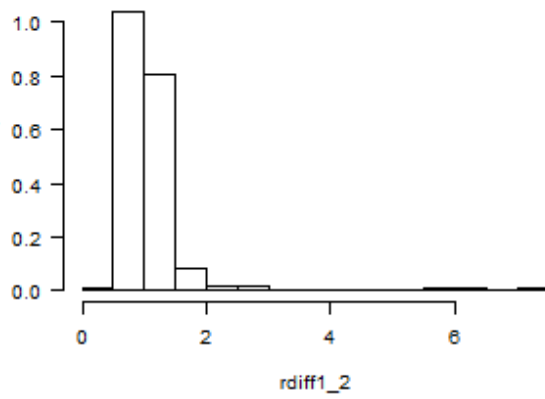
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 21074.6816 p= 0

d2: JB= 72718.8501 p= 0

d3: JB= 127218.305 p= 0

1997 vs 1998



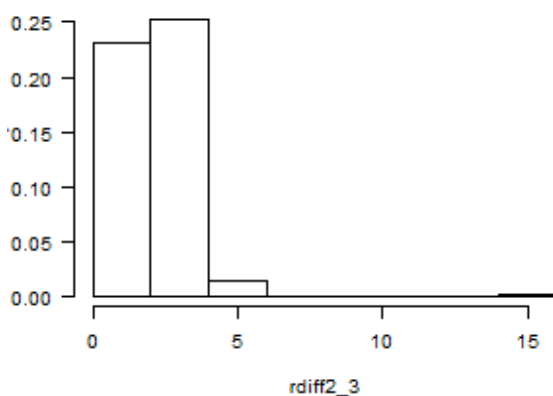
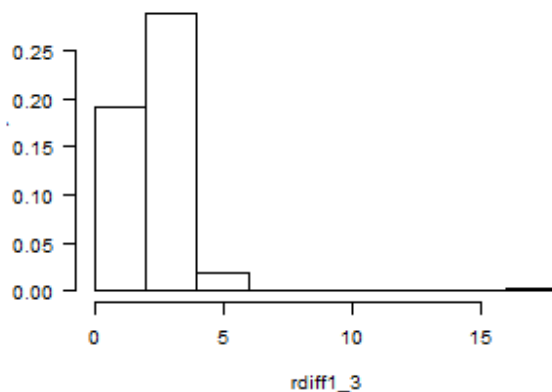
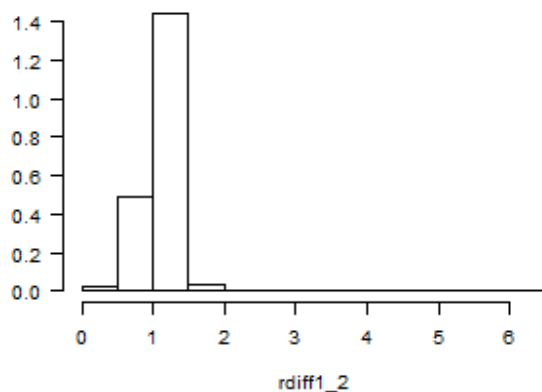
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 31268.4949 p= 0

d2: JB= 106680.3228 p= 0

d3: JB= 4261.3995 p= 0

1998 vs 1999



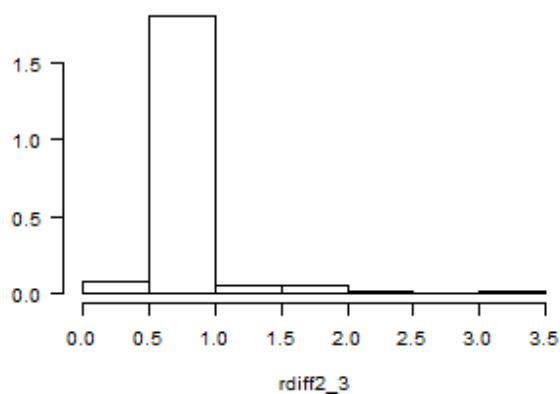
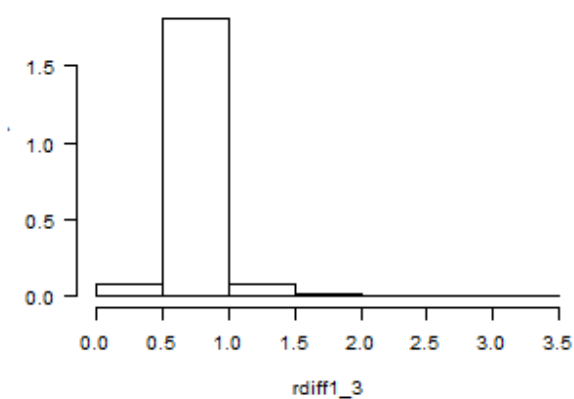
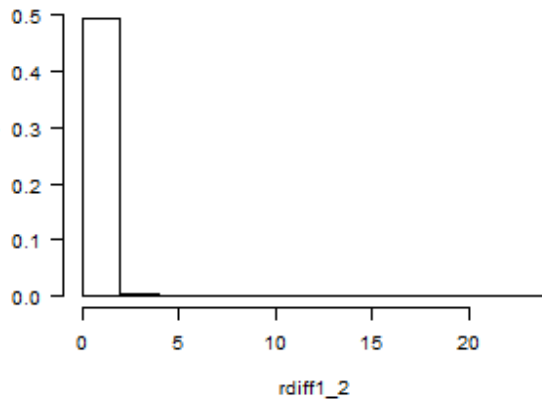
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 128957.2699 p= 0

d2: JB= 41634.3955 p= 0

d3: JB= 44943.5 p= 0

1999 vs 2000



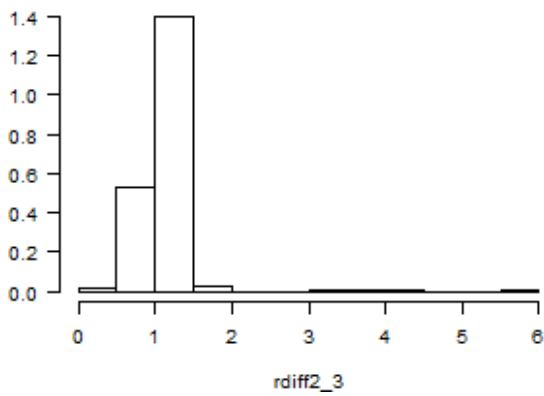
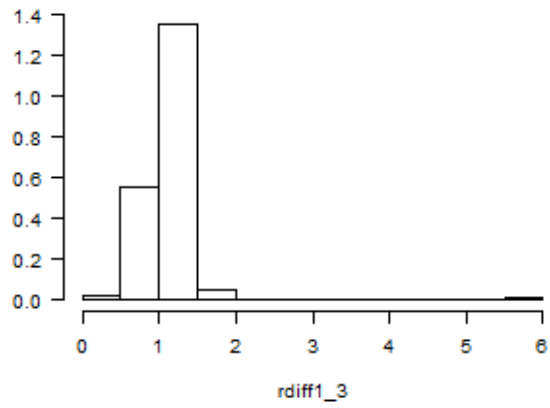
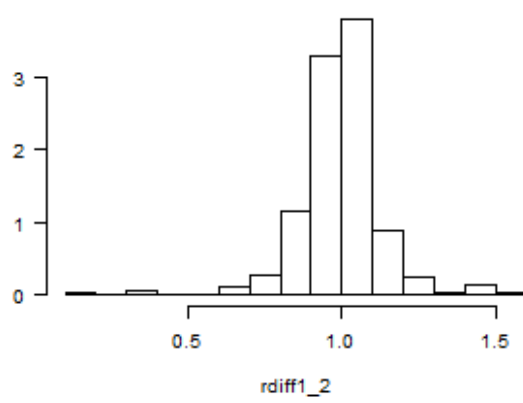
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 993558.1789 p= 0

d2: JB= 18312.2458 p= 0

d3: JB= 551073.8473 p= 0

2000 vs 2001



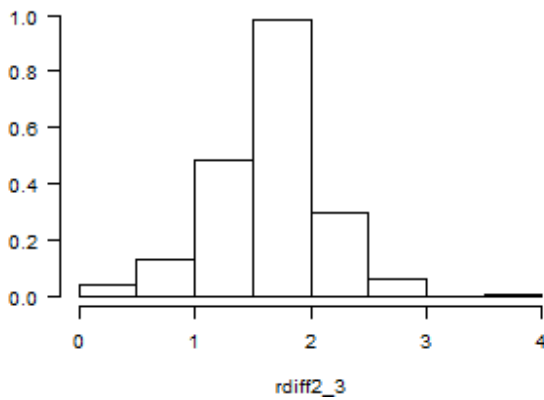
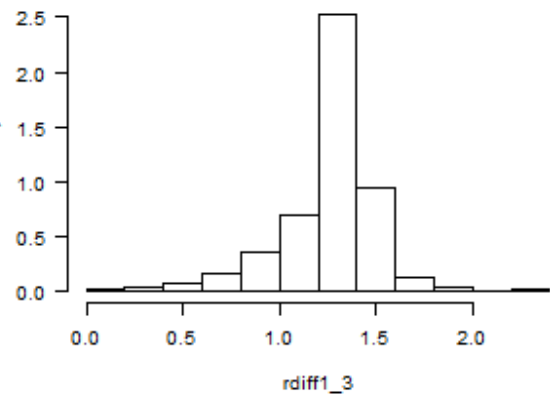
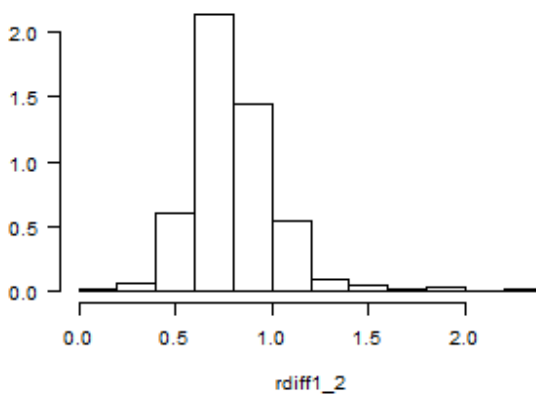
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 951.4269 p= 0

d2: JB= 154578.9988 p= 0

d3: JB= 67832.9191 p= 0

2001 vs 2002



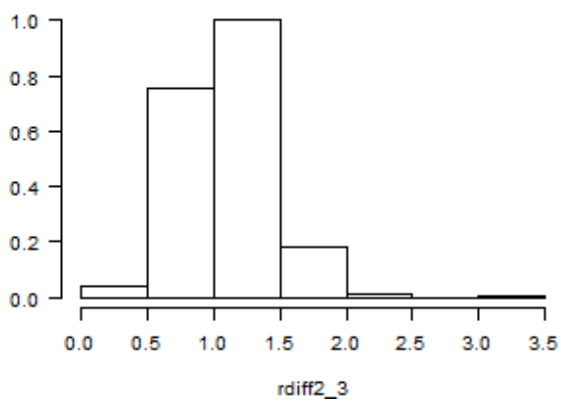
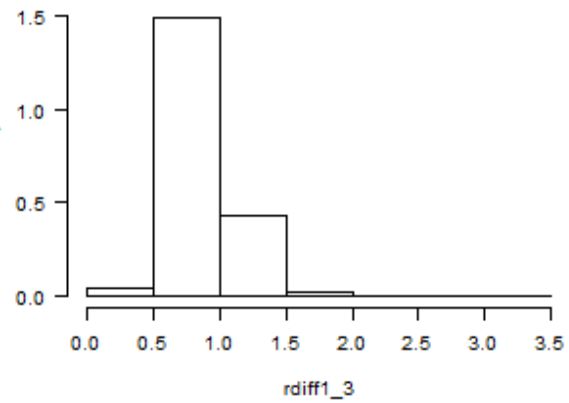
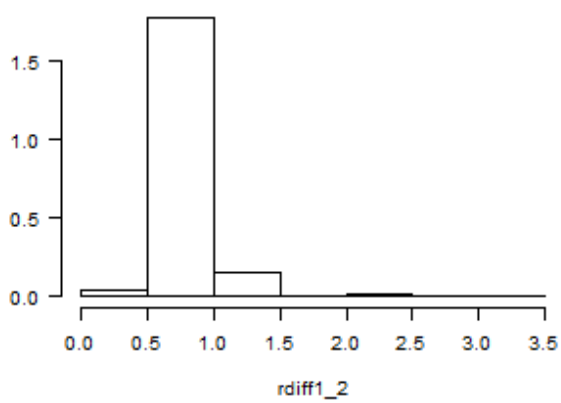
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 695.7331 p= 0

d2: JB= 365.3566 p= 0

d3: JB= 164483.6279 p= 0

2002 vs 2003



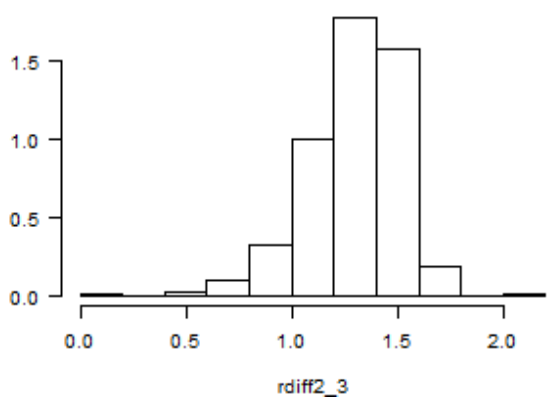
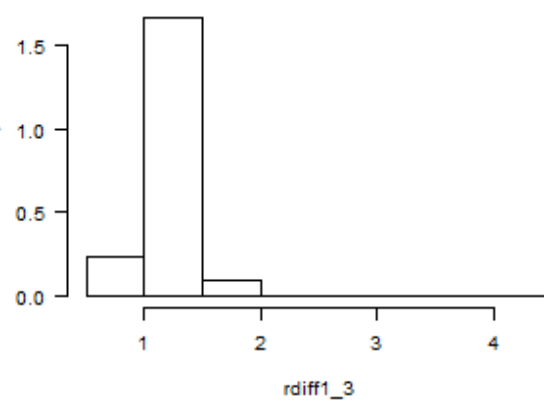
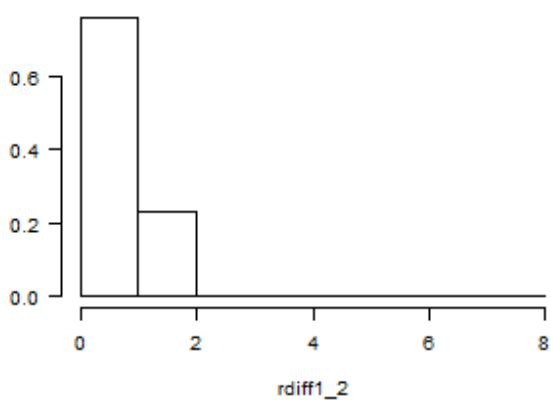
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 19475.5837 p= 0

d2: JB= 3807.5678 p= 0

d3: JB= 459.7679 p= 0

2003 vs 2004



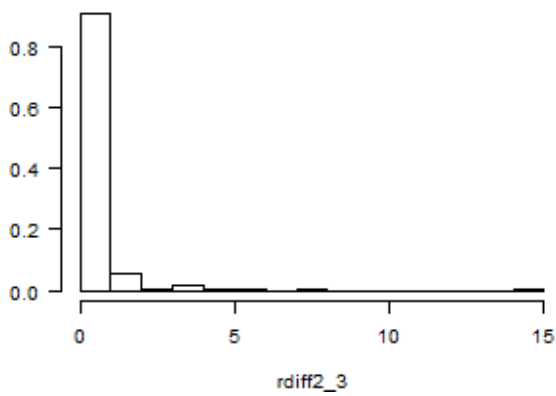
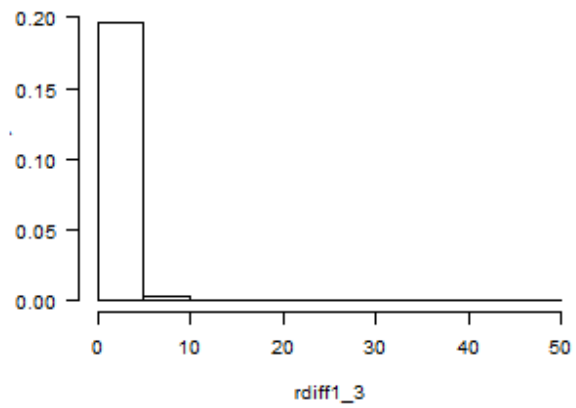
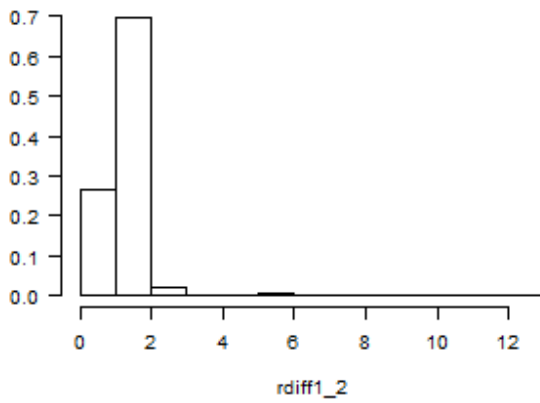
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 318797.6624 p= 0

d2: JB= 47903.8647 p= 0

d3: JB= 258.7664 p= 0

2004 vs 2005



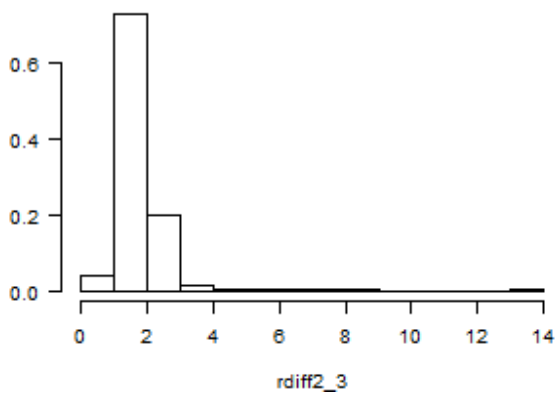
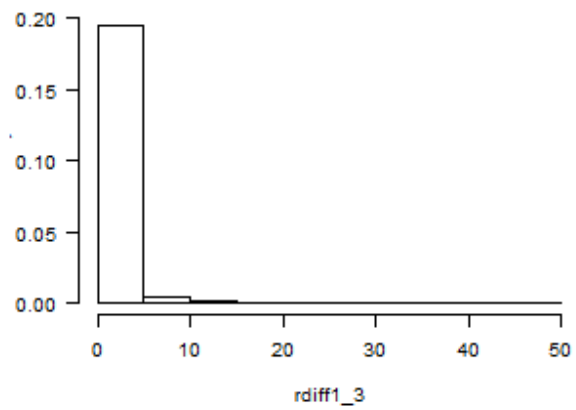
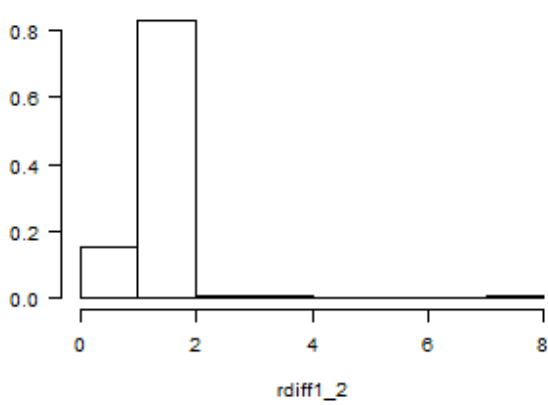
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 165168.6461 p= 0

d2: JB= 760977.0156 p= 0

d3: JB= 173646.2985 p= 0

2005 vs 2006



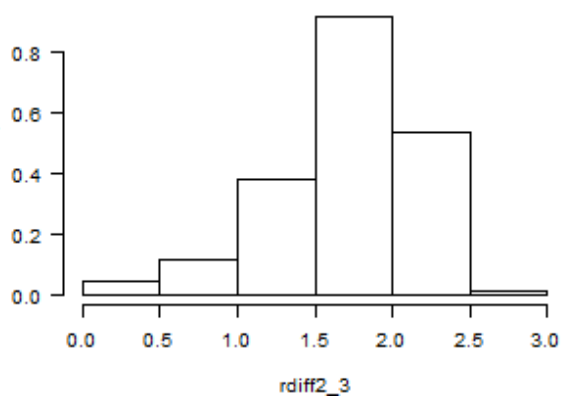
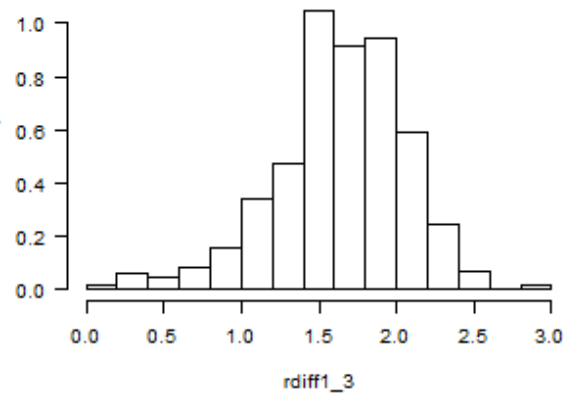
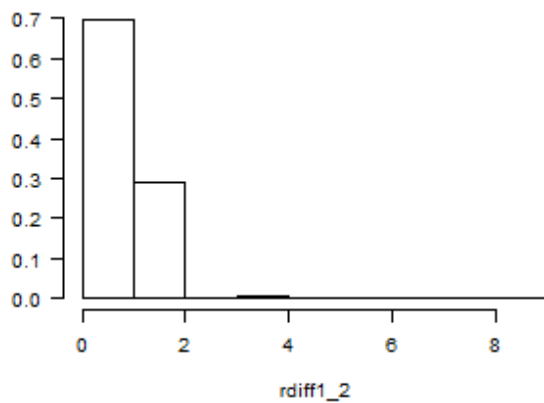
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 87532.3339 p= 0

d2: JB= 1098086.4124 p= 0

d3: JB= 88239.911 p= 0

2006 vs 2007



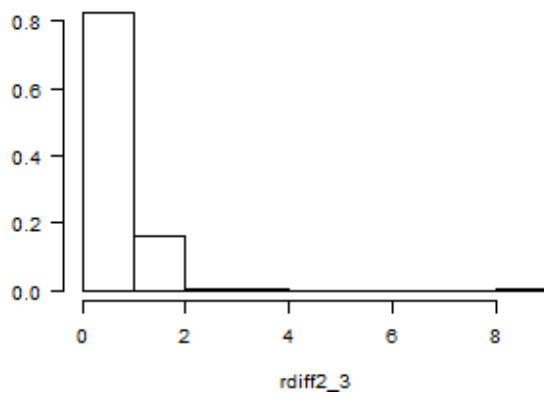
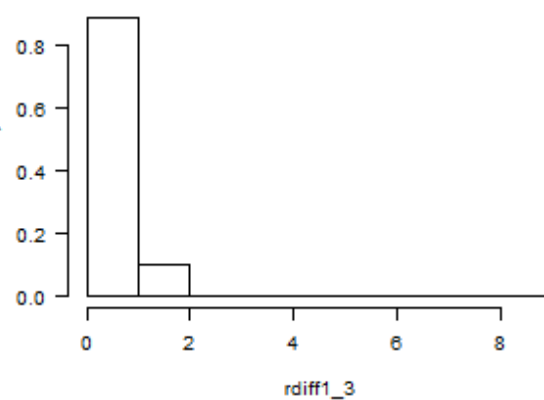
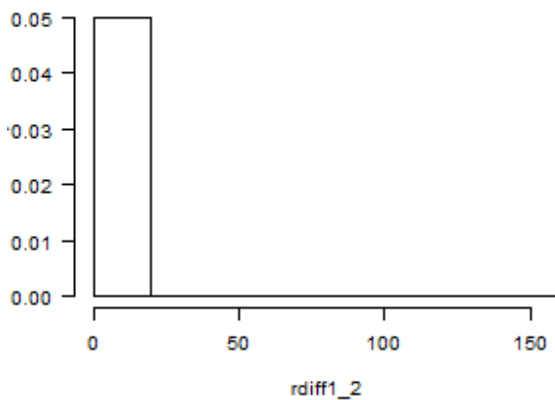
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 564263.4251 p= 0

d2: JB= 31.6605 p= 0

d3: JB= 62.6543 p= 0

2007 vs 2008



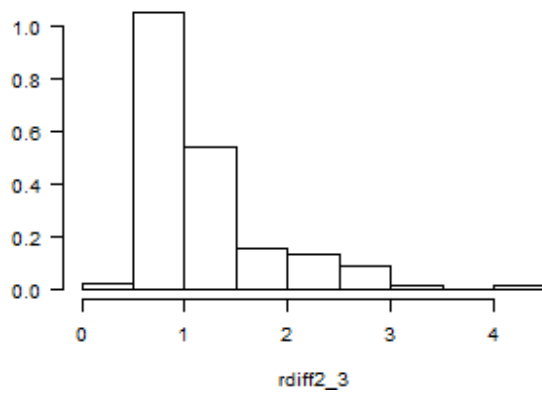
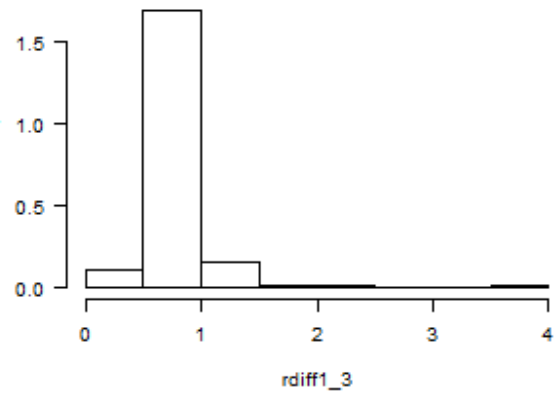
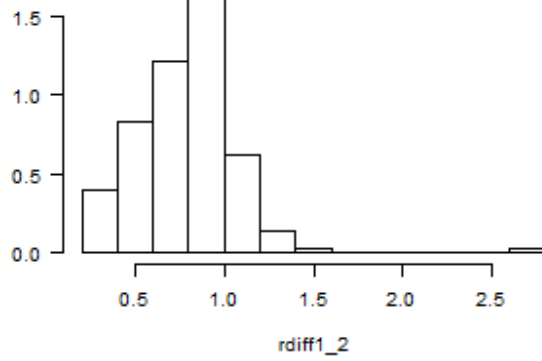
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 858662.1405 p= 0

d2: JB= 205042.8993 p= 0

d3: JB= 223065.4753 p= 0

2008 vs 2009



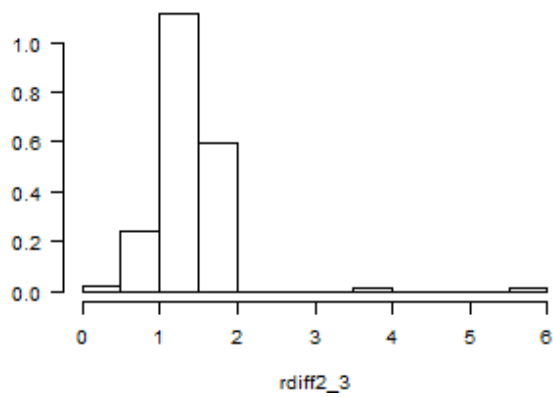
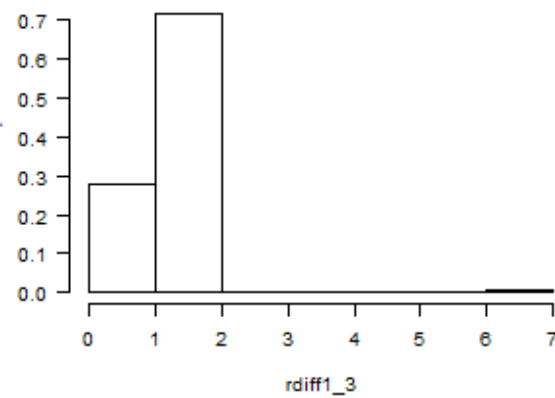
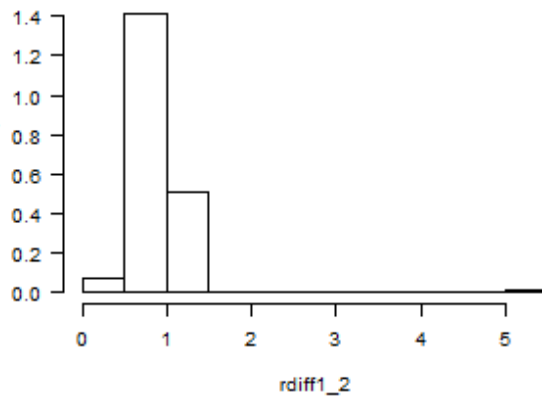
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 33845.77 p= 0

d2: JB= 11477.7286 p= 0

d3: JB= 152208.8397 p= 0

2009 vs 2010



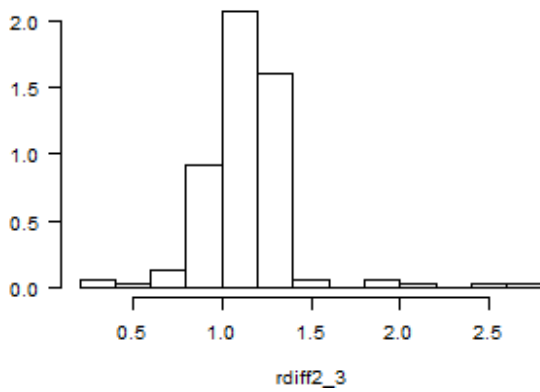
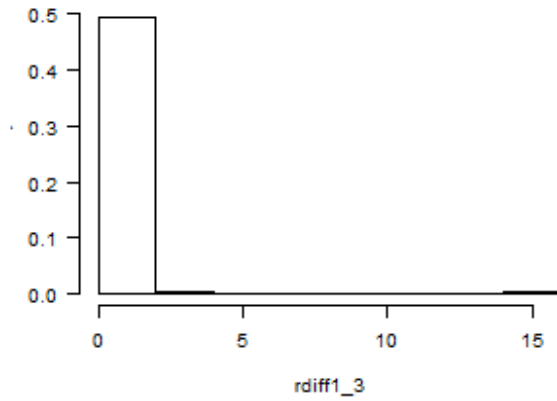
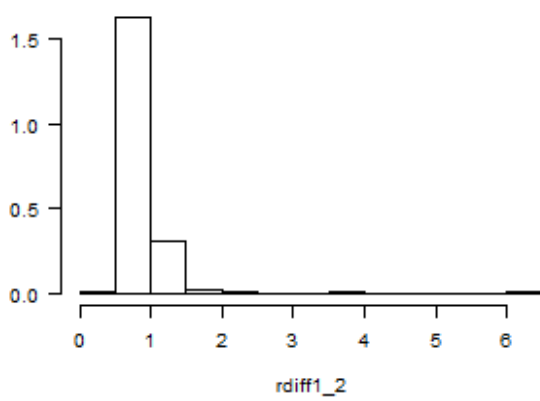
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 71129.447 p= 0

d2: JB= 32048.2 p= 0

d3: JB= 324824.7037 p= 0

2010 vs 2011



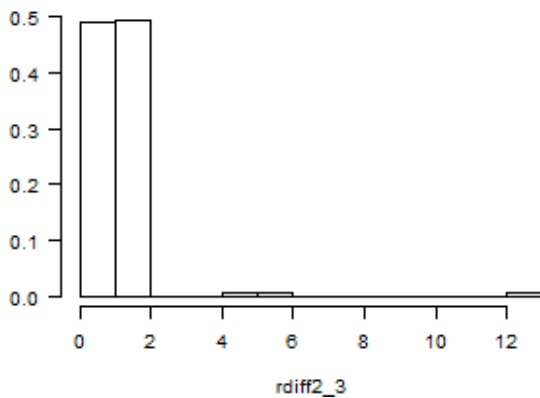
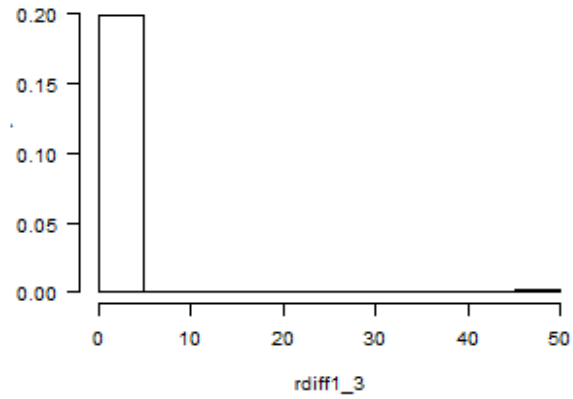
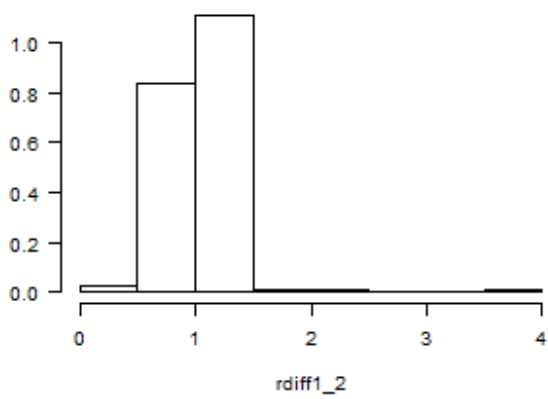
Jarque-Bera normality tests

d1: JB= 58945.4258 p= 0

d2: JB= 227489.791 p= 0

d3: JB= 183897.1511 p= 0

2011 vs 2012



Jarque-Bera normality tests

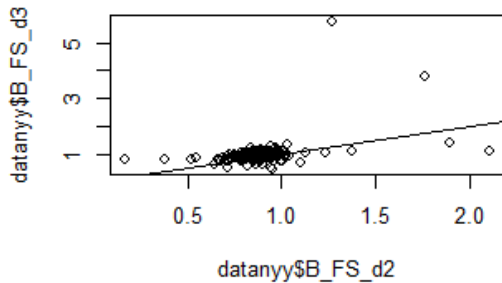
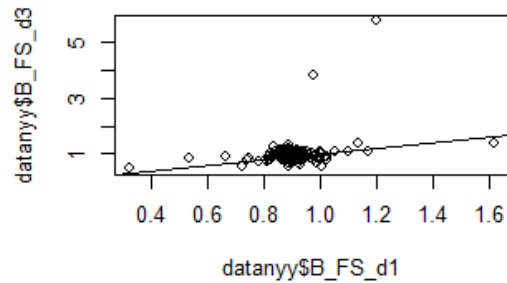
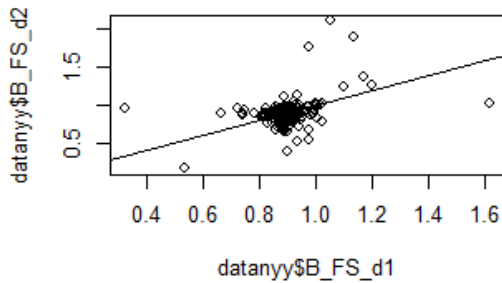
d1: JB= 11819.7378 p= 0

d2: JB= 196178.7355 p= 0

d3: JB= 37167.1965 p= 0

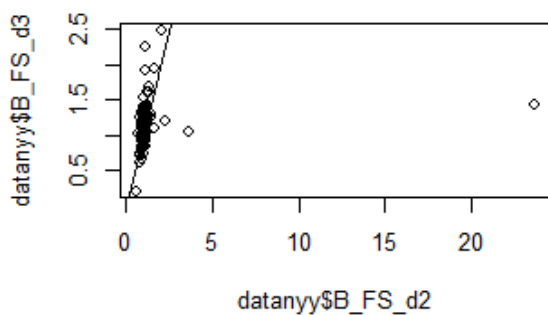
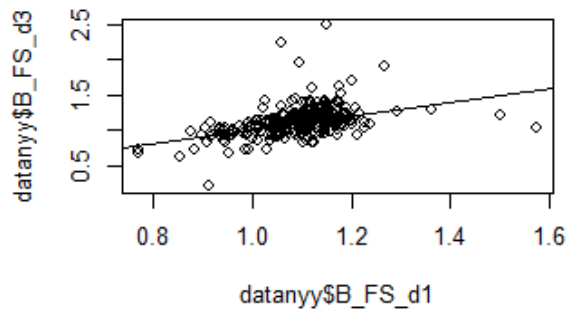
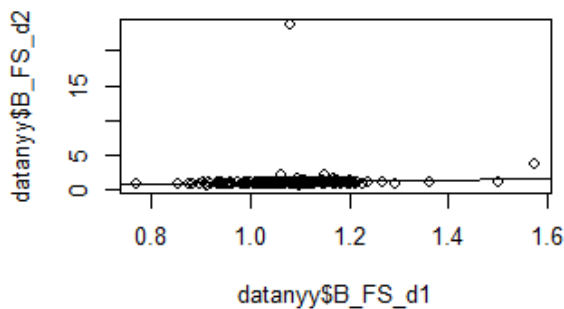
Appendiks 4: Resultater for den robuste Hotelling T^2 test for alle frontier shifts 1994-2012.

1994 - 1995



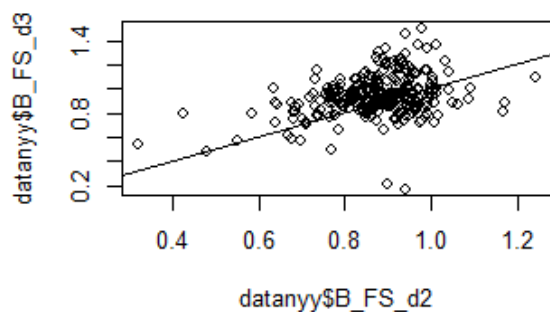
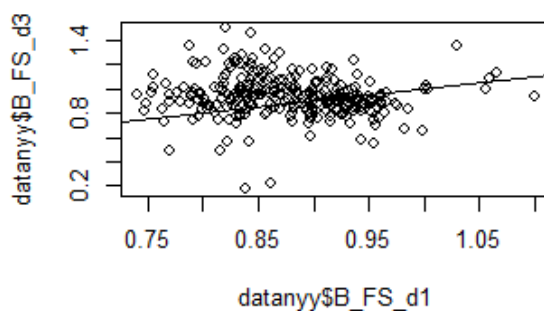
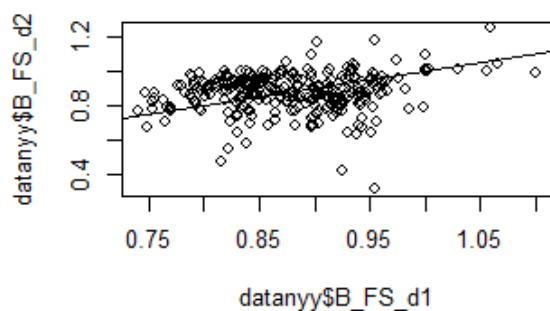
gns (d1 , d2 , d3) = (0.903 0.886 0.981)
 Reweighted MCD Hotelling T^2 :
 $T' = (0.895 0.863 0.971)$
 $H_0 \mu = 1: T^2 = 46924.75 \quad p = 0$
 $H_0 \mu \text{ en } T^2 = 3372.34 \quad p = 0$
 $(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 \ 0 \ 0)$

1995 - 1996



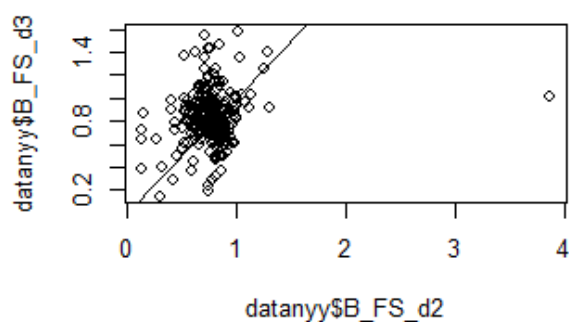
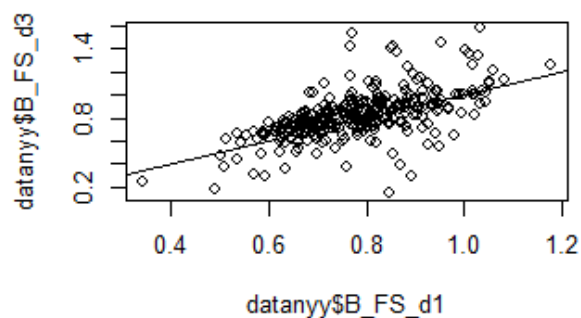
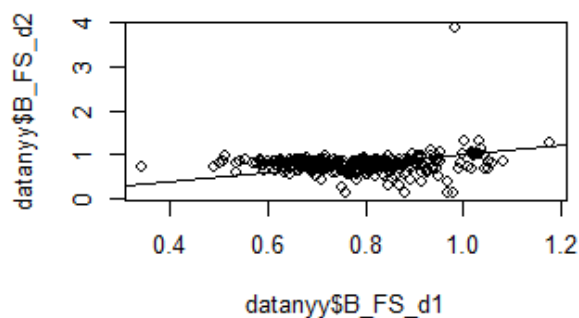
gns (d1 , d2 , d3) = (1.092 1.150 1.111)
 Reweighted MCD Hotelling T^2 :
 $T' = (1.092 1.033 1.096)$
 $H_0 \mu = 1: T^2 = 5045.81 \quad p = 0$
 $H_0 \mu \text{ en } T^2 = 1823.26 \quad p = 0$
 $(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 \ 0 \ 0)$

1996 - 1997



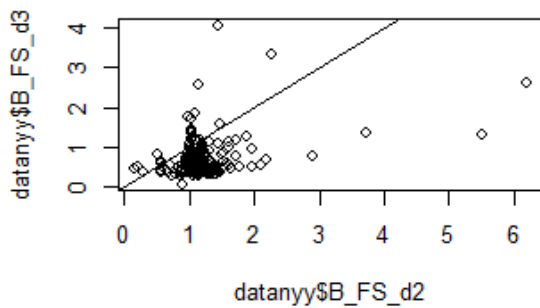
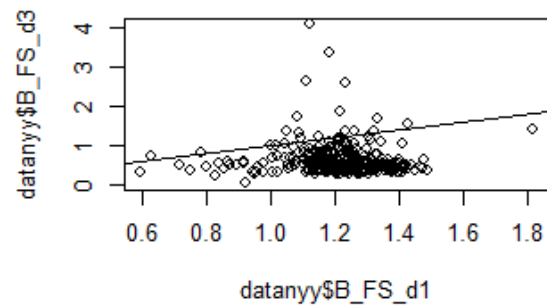
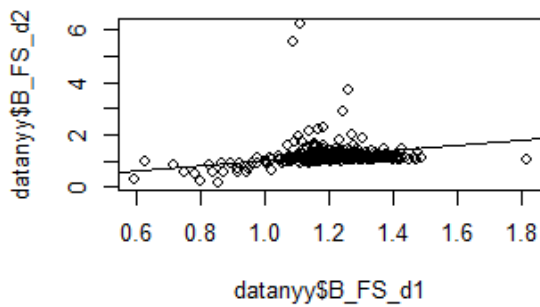
gns (d1 , d2 , d3) = (0.882 0.877 0.94)
 Reweighted MCD Hotelling T^2:
 T' = (0.880 0.883 0.951)
 H0 mu=1:T^2= 24764.93 p = 0
 H0 mu en T^2= 977.2 p = 0
 (d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

1997 - 1998



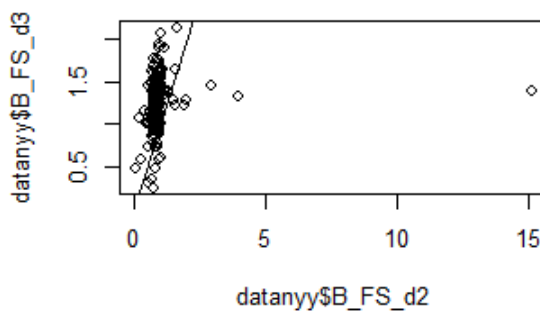
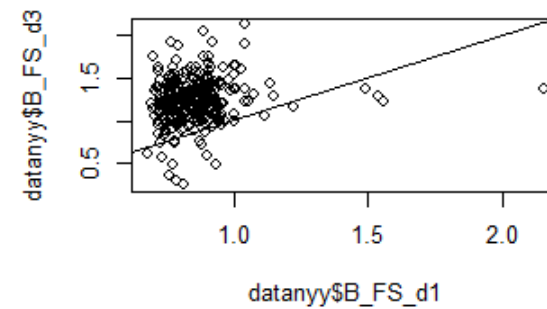
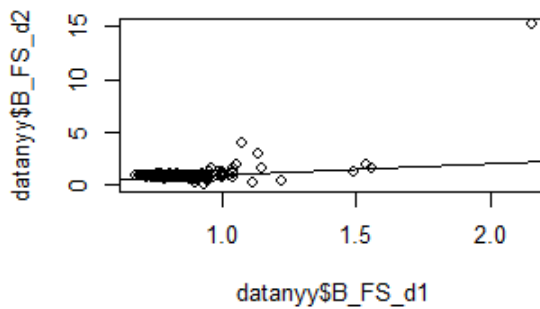
gns (d1 , d2 , d3) = (0.781 0.773 0.81)
 Reweighted MCD Hotelling T^2:
 T' = (0.762 0.768 0.802)
 H0 mu=1:T^2= 48260.4 p = 0
 H0 mu en T^2= 730.54 p = 0
 (d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0.156)

1998 - 1999



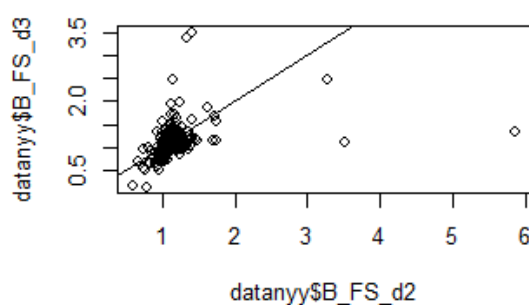
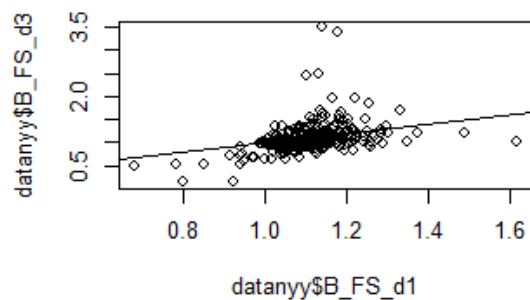
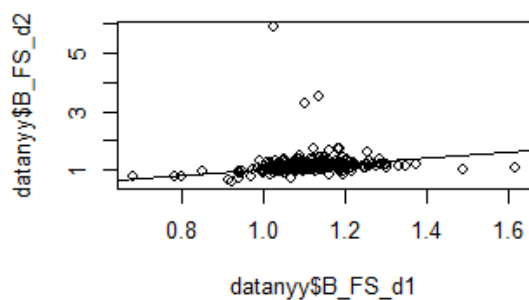
gns (d1 , d2 , d3) = (1.207 1.176 0.631
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (1.235 1.117 0.567)
H0 mu=1:T^2= 31188.48 p= 0
H0 mu ens:T^2= 26987.73 p= 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

1999 - 2000



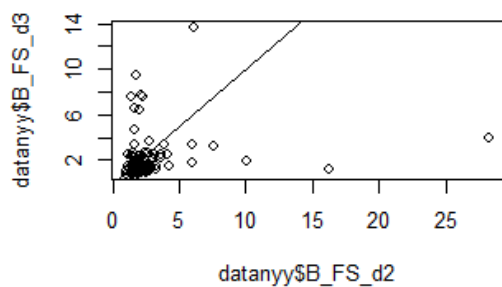
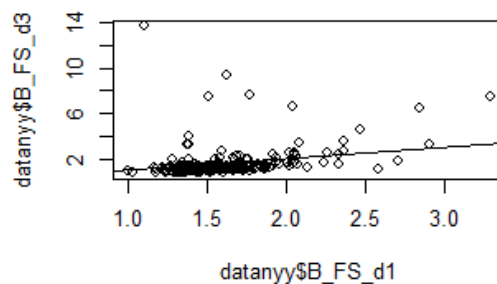
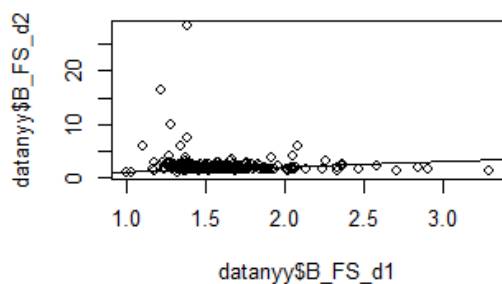
gns (d1 , d2 , d3) = (0.860 0.928 1.231
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (0.832 0.853 1.229)
H0 mu=1:T^2= 94285.07 p= 0
H0 mu ens:T^2= 18662.11 p= 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

2000 - 2001



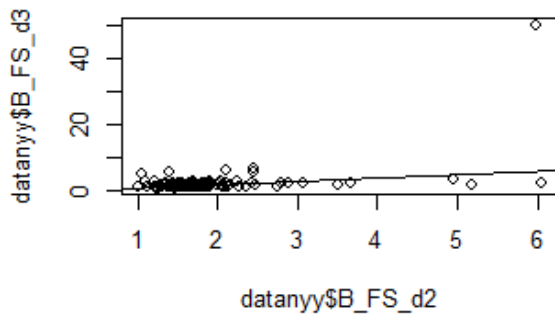
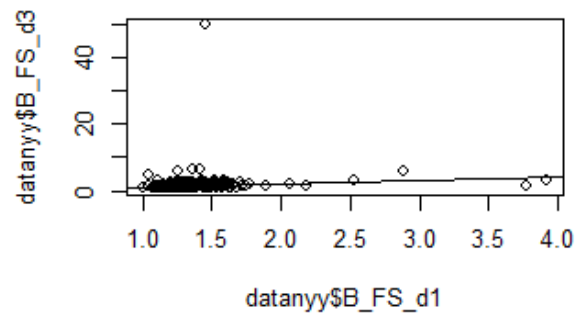
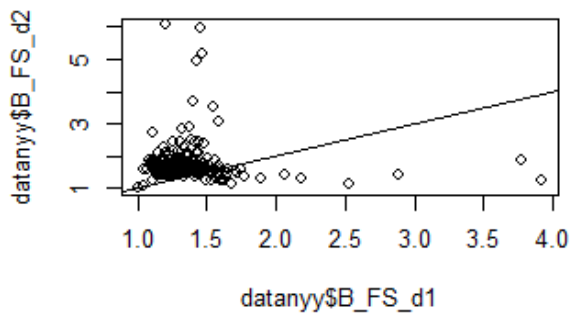
gns (d1 , d2 , d3) = (1.112 1.150 1.07
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (1.108 1.120 1.039)
H0 mu=1:T^2= 18285.1 p= 0
H0 mu en T^2= 3461.44 p= 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0.144)

2001 - 2002



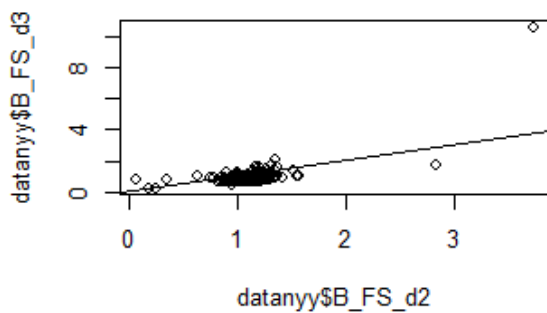
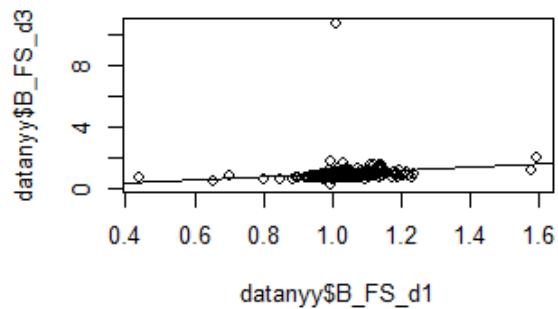
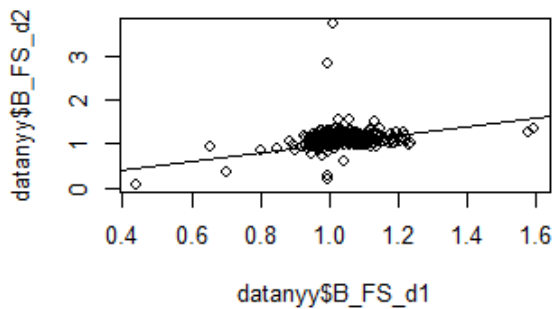
gns (d1 , d2 , d3) = (1.545 2.178 1.41
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (1.489 1.934 1.121)
H0 mu=1:T^2= 212081.75 p= 0
H0 mu en T^2= 88482.9 p= 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0

2002 - 2003



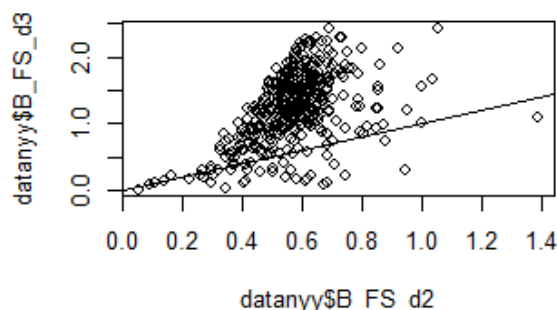
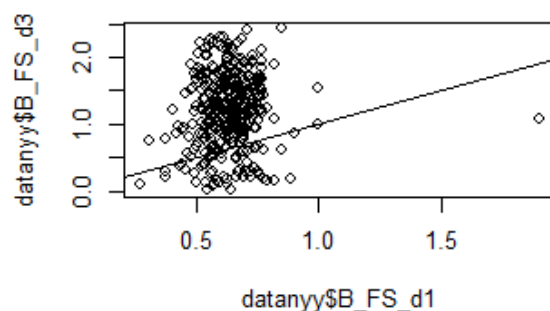
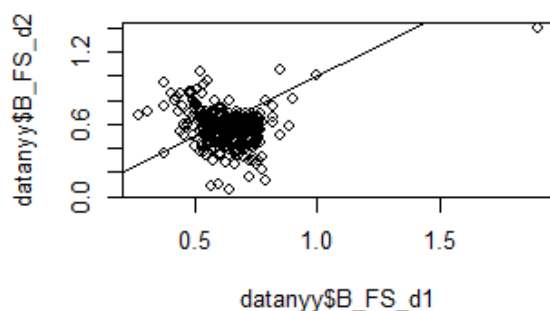
```
gns ( d1 , d2 , d3 ) = ( 1.336 1.689 1.72
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = ( 1.288 1.616 1.482 )
H0 mu=1:T^2= 222630.52 p = 0
H0 mu ensT^2= 19112.39 p = 0
( d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3 ) = ( 0 0 0 )
```

2003 - 2004



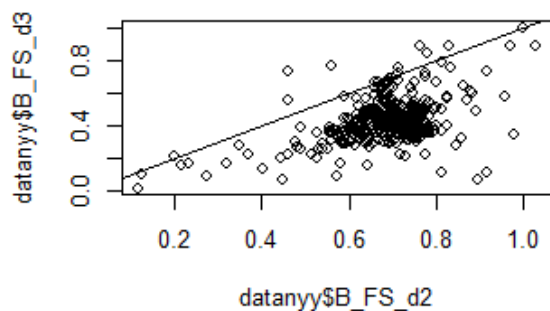
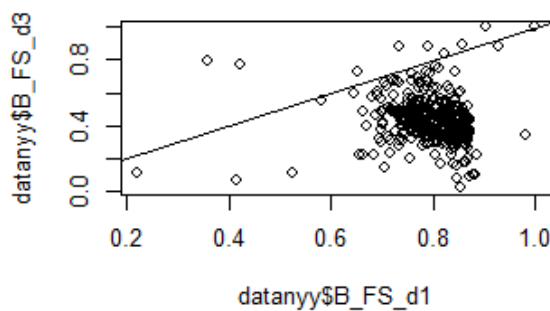
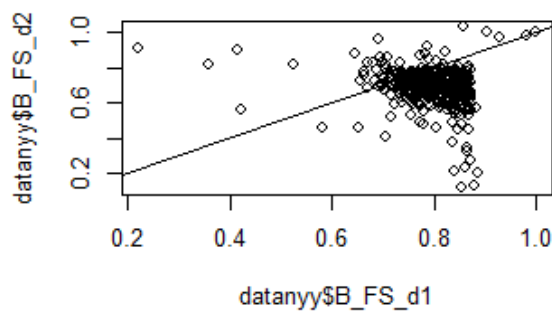
```
gns ( d1 , d2 , d3 ) = ( 1.031 1.103 0.89
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = ( 1.021 1.098 0.828 )
H0 mu=1:T^2= 34975.98 p = 0
H0 mu ensT^2= 33334.66 p = 0
( d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3 ) = ( 0 0 0 )
```

2004 - 2005



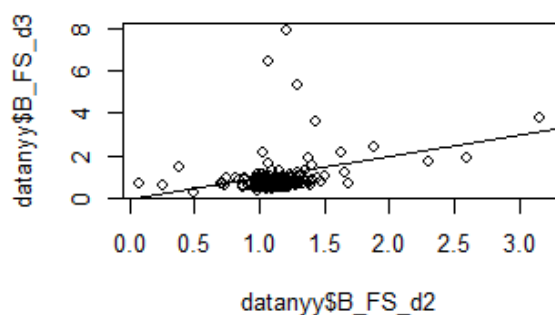
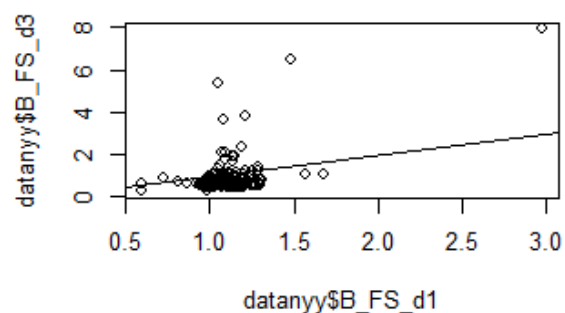
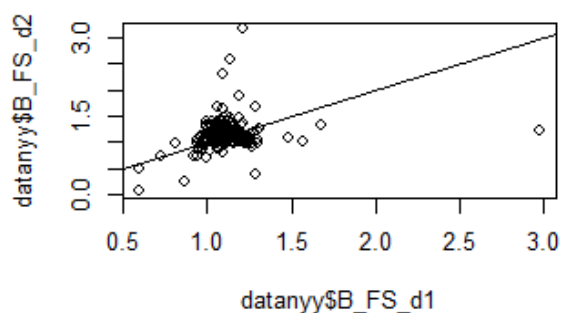
gns (d1 , d2 , d3) = (0.641 0.573 1.22;
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (0.644 0.558 1.278)
H0 mu=1:T^2= 477876.39 p= 0
H0 mu ens^2= 22896.08 p= 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

2005 - 2006



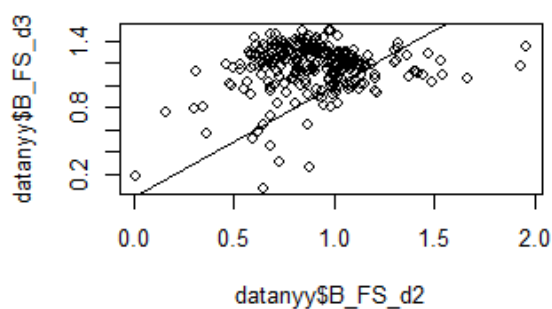
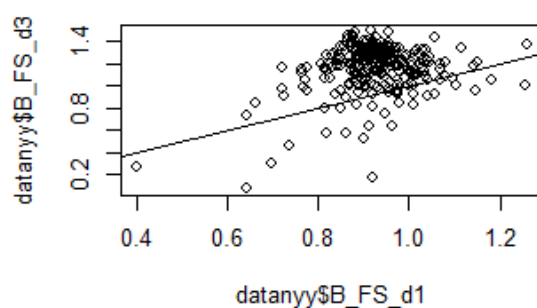
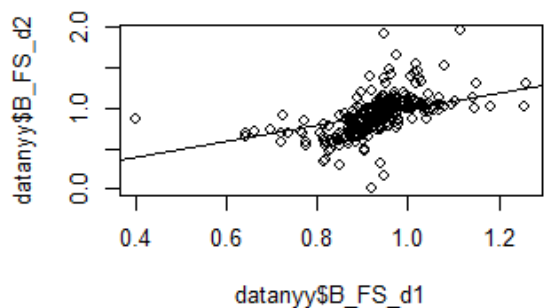
gns (d1 , d2 , d3) = (0.796 0.689 0.43;
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (0.800 0.693 0.429)
H0 mu=1:T^2= 570574.56 p= 0
H0 mu ens^2= 56249.22 p= 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

2006 - 2007



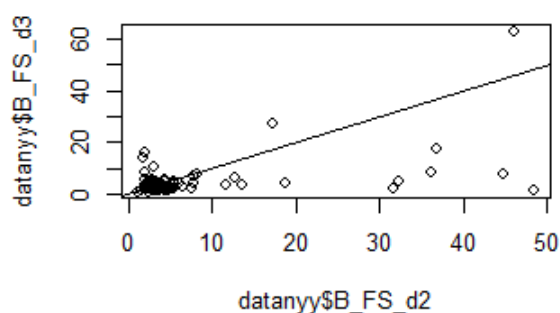
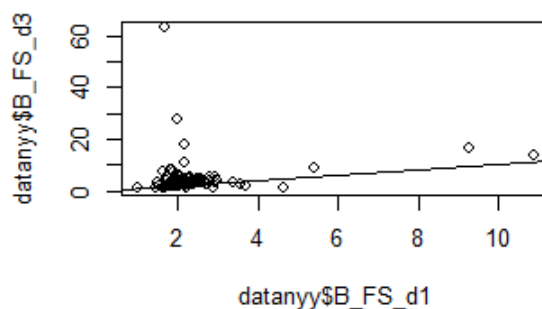
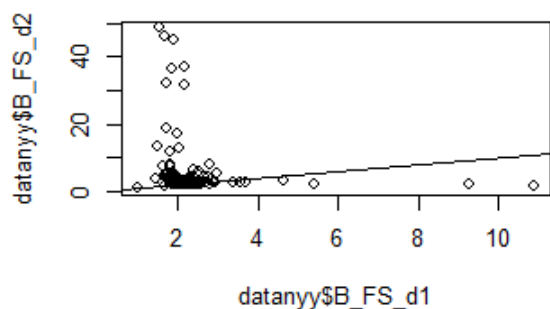
gns (d1 , d2 , d3) = (1.102 1.149 0.771)
 Reweighted MCD Hotelling T^2:
 T' = (1.093 1.148 0.646)
 H0 mu=1:T^2= 73392.09 p = 0
 H0 mu en T^2= 62237.01 p = 0
 (d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

2007 - 2008



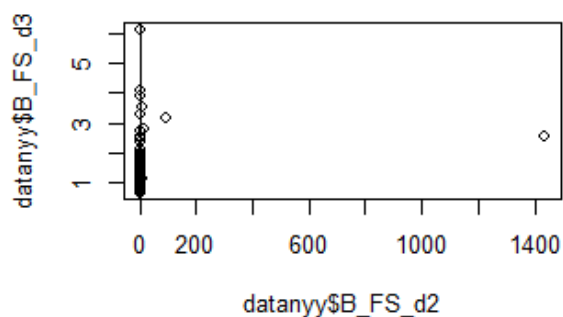
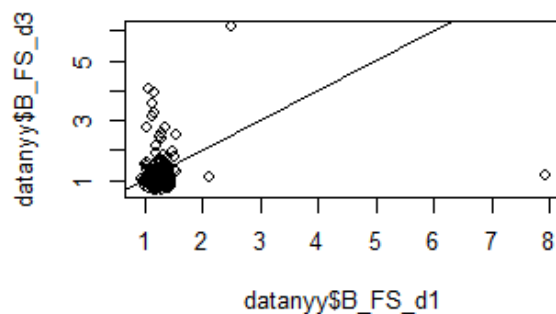
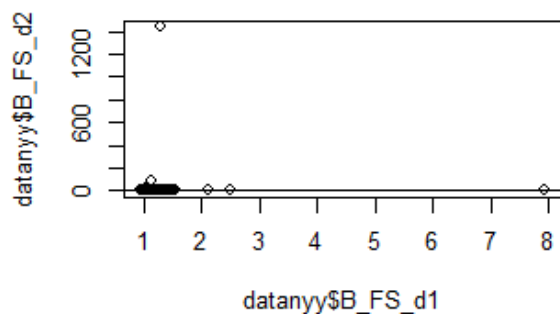
gns (d1 , d2 , d3) = (0.929 0.906 1.151)
 Reweighted MCD Hotelling T^2:
 T' = (0.931 0.904 1.205)
 H0 mu=1:T^2= 13187.95 p = 0
 H0 mu en T^2= 12352.83 p = 0
 (d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

2008 - 2009



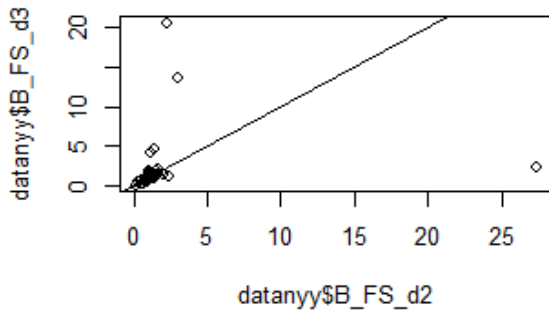
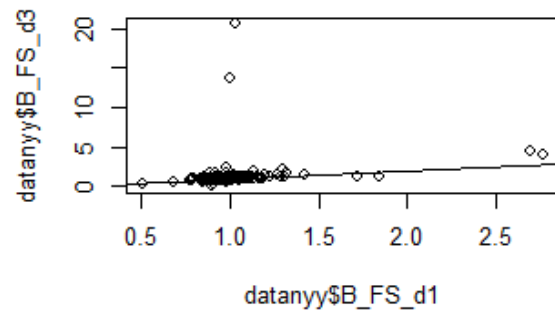
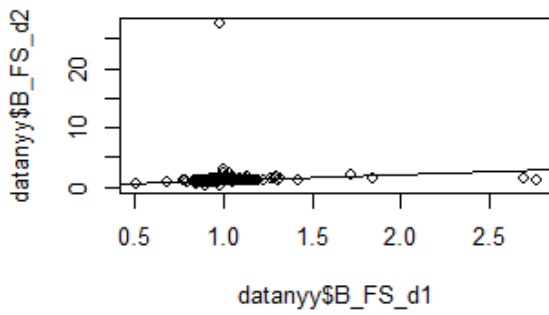
gns (d1 , d2 , d3) = (2.174 4.366 3.52;
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (2.028 2.826 2.689)
H0 mu=1:T^2= 153742.25 p = 0
H0 mu en f^2= 10657.12 p = 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

2009 - 2010



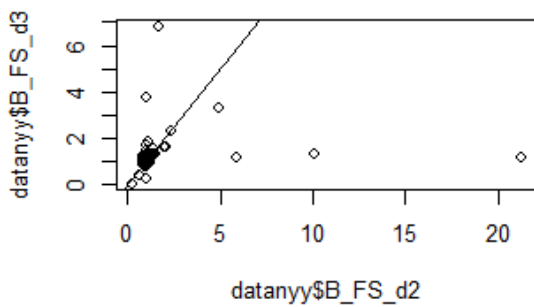
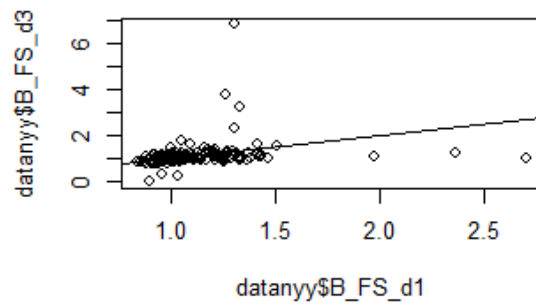
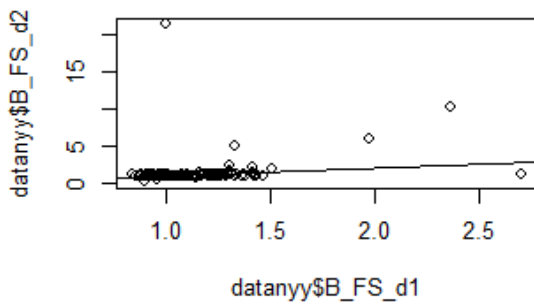
gns (d1 , d2 , d3) = (1.304 9.222 1.22;
Reweighted MCD Hotelling T^2:
T' = (1.267 1.350 1.034)
H0 mu=1:T^2= 54480.33 p = 0
H0 mu en f^2= 7039.8 p = 0
(d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0)

2010 - 2011



gns (d1 , d2 , d3) = (1.000 1.260 1.201
 Reweighted MCD Hotelling T^2:
 T' = (0.959 1.095 0.943)
 H0 mu=1:T^2= 6629.86 p = 0
 H0 mu en s^2= 4851.02 p = 0
 (d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0.00

2011 - 2012



gns (d1 , d2 , d3) = (1.129 1.305 1.131
 Reweighted MCD Hotelling T^2:
 T' = (1.093 1.056 1.059)
 H0 mu=1:T^2= 2074.31 p = 0
 H0 mu en s^2= 148.2 p = 0
 (d1 = d2 , d1 = d3 , d2 = d3) = (0 0 0.